

G  
g  
y  
A  
s  
k  
p  
d  
V  
z  
b  
f  
C  
T  
w  
M

17

**T**  
TextO  
para  
DiscussãO

**Funções de Produção**  
Uma Abordagem Estatística com o  
Uso de Modelos de Encapsulamento de Dados



---

*Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária  
Secretaria de Administração Estratégica  
Ministério da Agricultura, Pecuária e Abastecimento*

Texto para Discussão 17

Funções de Produção  
Uma Abordagem Estatística com o Uso de Modelos  
de Encapsulamento de Dados

*Geraldo da Silva e Souza*

**Embrapa Informação Tecnológica**  
*Brasília, DF*  
2003

Exemplares desta publicação podem ser adquiridos na:

**Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária – Embrapa**

Secretaria de Administração Estratégica

Edifício-Sede da Embrapa

Parque Estação Biológica – PqEB – Av. W3 Norte (final)

CEP 70770-901 Brasília, DF

Fone: (61) 448-4449

Fax: (61) 447-4319

Editor da série

Antônio Jorge de Oliveira

Coordenador editorial

Vicente G. F. Guedes

Corpo editorial

Antonio Flávio Dias Avila

Antônio Jorge de Oliveira – Presidente

Antonio Raphael Teixeira Filho

Ivan Sergio Freire de Sousa

Levon Yegianantz

Produção editorial e gráfica

Embrapa Informação Tecnológica

Revisão de texto e tratamento editorial

Raquel Siqueira de Lemos

Normalização bibliográfica

Rosa Maria e Barros

Editoração eletrônica

José Batista Dantas

Projeto gráfico

Tênisson Waldow de Souza

Tiragem: 500 exemplares

**Todos os direitos reservados.**

A reprodução não autorizada desta publicação, no todo ou em parte, constitui violação dos direitos autorais (Lei nº 9.610).

CIP-Brasil. Catalogação-na-publicação.  
Embrapa Informação Tecnológica.

---

Souza, Geraldo da Silva e.

Funções de produção: uma abordagem estatística com o uso de modelos de encapsulamento de dados / Geraldo da Silva e Souza. – Brasília : Embrapa Informação Tecnológica, 2003. 49 p. - - (Texto para discussão , ISSN 1677-5473 ; 17).

1. Econometria. I. Título. II. Série.

**CDD 519.5 (21. ed.)**

---

© Embrapa 2003

## Apresentação

*Texto para Discussão* é um veículo utilizado pela Secretaria de Administração Estratégica – SEA –, da Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária – Embrapa –, para dinamizar a circulação de idéias novas e a prática de reflexão e de debate sobre aspectos relacionados à ciência, à tecnologia, ao desenvolvimento agrícola e ao agronegócio.

O objetivo da série é fazer com que uma comunidade mais ampla, composta de profissionais das diferentes áreas científicas, debata os textos apresentados, contribuindo para o seu aperfeiçoamento.

O leitor poderá apresentar comentários e sugestões, assim como debater diretamente com os autores, em seminários especialmente programados, ou utilizando qualquer um dos endereços fornecidos: eletrônico, fax ou postal.

Os trabalhos para esta coleção devem ser enviados à Embrapa, Secretaria de Administração Estratégica, Edifício-Sede, Parque Estação Biológica – PqEB –, Av. W3 Norte (final), CEP 70770-901, Brasília, DF. Contatos com a Editoria devem ser feitos pelo fone (61) 448-4449 ou pelo fax (61) 448-4319.

Os usuários da Internet podem acessar as publicações pelo endereço <http://www.embrapa.br/unidades/uc/sea/textdiscussao.htm>. Para os usuários do Sistema Embrapa, basta clicar em **novidades**, na Intranet.

# Sumário

Resumo .....	9
Abstract .....	11
Introdução .....	13
Função de Produção DEA .....	17
Modelo Estatístico .....	22
Inferência Estatística .....	27
Uma Aplicação .....	34
Conclusão .....	44
Referências .....	46

Funções de Produção  
Uma Abordagem Estatística com o Uso de Modelos  
de Encapsulamento de Dados

*Geraldo da Silva e Souza<sup>1</sup>*

<sup>1</sup> Pesquisador da Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária – Embrapa. Parque Estação Biológica – PqEB –, Av. W3 Norte (final), Caixa Postal 040315, CEP 70770-901, Brasília, DF, Brasil.

# Funções de Produção – Uma Abordagem com o Uso de Modelos de Encapsulamento de Dados

---

## Resumo

---

Neste artigo, desenvolvem-se as propriedades estatísticas dos estimadores de funções de produção obtidas com o uso da análise de encapsulamento de dados (DEA). Para os modelos de produção determinísticos, mostra-se que os estimadores DEA são de máxima verossimilhança não-paramétrica, consistentes e que geram ineficiências técnicas que convergem em distribuição. A distribuição assintótica conjunta das ineficiências técnicas permite o teste de hipóteses estatísticas no contexto DEA. Esses resultados foram originalmente obtidos por Banker (1993) e aqui são refinados e generalizados. Relaxando-se a suposição de ineficiências igualmente distribuídas e permitindo-se uma escala arbitrária de operação para a tecnologia subjacente, mostra-se a consistência forte da função de produção DEA e como modelar efeitos que causam ineficiências sob as hipóteses distribucionais de meia-normal, normal truncada ou gama para as ineficiências sob condições de heteroscedasticidade. Para o caso iid apresentam-se medidas de bondade de ajuste quando as ineficiências têm distribuição comum exponencial ou meia-normal. Uma aplicação empírica ilustra os resultados teóricos e investiga a natureza da função de produção da companhia estatal, principal responsável pela pesquisa agrícola no Brasil, isto é, a Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária – Embrapa.

**Palavras-chave:** DEA, análise de encapsulamento de dados; fronteiras de produção; comparações de eficiência técnica.

# Production Functions — A Statistical Approach Using Data Envelopment Analysis

---

## Abstract

---

This paper develops the statistical properties of nonparametric estimators of production functions obtained through the use of data envelopment analysis (DEA). For deterministic production models it is shown that DEA production functions are consistent nonparametric maximum likelihood estimators and generate technical inefficiencies that converge in distribution. The asymptotic joint distribution of the estimated technical inefficiencies allows hypothesis testing in DEA. These results are due mainly to Banker (1993) and here they are refined and extended. Relaxing the assumption of equally distributed inefficiencies and allowing for an arbitrary scale of operation for the underlying technology, it is shown the strong consistency of the DEA production function and how one can model effects causing inefficiencies under the assumptions of half-normal, truncated normal or gamma distributions for the inefficiencies, not ruling out heteroscedasticity. Measures of goodness of fit are also developed for the iid case assuming an exponential or a half-normal distribution. An empirical application illustrates the theoretical results and investigates the nature of the production function of the major state company responsible for agricultural research in Brazil, namely Embrapa (Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária).

**Key words:** Data envelopment analysis; production frontiers; efficiency comparisons.



## Introdução

---



s modelos de produção com base na análise de encapsulamento de dados (DEA) têm sido objeto de uso intenso na literatura econométrica e de pesquisa operacional. Publicações recentes que ilustram esse fato são Seifford & Thrall (1990), Färe et al. (1994), Charnes et al., (1995), Brocket & Golany (1996), Coelli et al. (1998), Souza et al. (1997, 1999), e Cooper et al. (2000). A abordagem DEA tem sido criticada por sua natureza essencialmente determinística. A razão para essa crítica é devida ao fato de que o modelo de produção que conduz às medidas de eficiência DEA não leva em conta a influência de erros de medida e outros ruídos na especificação da fronteira. Basicamente, todos os desvios da fronteira em tais modelos resultam tão-somente de ineficiências técnicas. Há situações, contudo, como a estudada neste artigo, onde os dados não parecem ser influenciados substancialmente por erros de medida, efeitos de tempo, etc., e portanto não há uma necessidade premente em postular, no modelo de produção, um componente estocástico para controlar esses efeitos.

Dois outros exemplos com evidência semelhante de modelos de produção subjacentes determinísticos são dados por Coelli et al. (1998, p. 193 e 216). Na realidade, existem mesmo referências na literatura que afirmam que os estimadores DEA podem muito bem ter melhor performance que a abor-

dagem da fronteira de produção estocástica em certos casos. Sobre esse tema vale a pena citar Coelli et al. (1998, p. 219):

“A utilização de uma fronteira estocástica provavelmente será mais apropriada do que a abordagem DEA em aplicações agrícolas, especialmente em países em desenvolvimento, onde os dados são influenciados fortemente por erros de medida e por efeitos do tempo, doenças, etc. Porém, no setor público de serviços onde

- as influências de caráter aleatório não são significativas;
- é importante modelar a produção com múltiplos produtos;
- os preços são difíceis de definir; e
- as hipóteses comportamentais, como de minimização de custos ou maximização de lucros, são difíceis de justificar, a abordagem DEA pode muito bem representar a escolha ótima. A escolha da abordagem apropriada deve ser feita numa base de análise caso a caso.”

Uma outra justificativa comum para o uso da técnica DEA no cálculo de medidas de eficiência de produção toma por base o *bootstrap* que fornece o meio para o cálculo do desvio-padrão das medidas de eficiência no ambiente não-paramétrico. Em um contexto geral de produção, com insumos e produtos múltiplos, a técnica DEA mede a eficiência de uma unidade produtora relativamente a uma fronteira estimada com base na solução de problemas de programação linear (PPL). A fronteira estimada está sujeita à variação amostral e, nesse contexto, está, portanto, sujeita à variação estocástica. Essa variabilidade estocástica pode ser capturada em simulações do processo de produção e, desse modo, pode-se gerar, para cada unidade produtora, uma popula-

ção de medidas de eficiência para a qual é possível aplicar métodos empíricos para a determinação de intervalos de confiança, vieses e medidas de erros. Essa é a ordem de idéias expressa no método *bootstrap* de Simar & Wilson (1998).

O *bootstrap*, porém, não é consistente se a fronteira for estocástica, como se pode ver em Löthgren (1997). O problema com a técnica DEA na presença de ruído é que a fronteira não está identificada. Como apontado em Park et al. (2000), o modelo de fronteira de produção só pode ser identificado com o uso de hipóteses paramétricas fortes sobre a fronteira ou por intermédio da repetição (usualmente no tempo) de observações nas unidades individuais sob avaliação.

Não é recomendável o uso de qualquer método particular de análise de eficiência em uma determinada aplicação. É preferível seguir ao longo da linha sugerida por Coelli et al. citada anteriormente. Deve-se reconhecer, porém, que a fronteira de produção, associada à técnica DEA, é mais fácil de ser obtida do que a contrapartida estocástica, e que as medidas de eficiência DEA sempre podem ser utilizadas como medidas de natureza empírica de performance, tenha-se ou não um modelo de produção teórico como suporte às observações. Ambos os métodos – fronteira estocástica e DEA determinístico – se corretamente aplicados, fornecem informações relevantes em uma análise de dados. As técnicas podem mesmo ser combinadas numa dada aplicação, como em Arnold et al. (1994).

Neste artigo, investiga-se um modelo para o qual a função de produção DEA tem propriedades estatísticas ótimas. Esse modelo é determinístico. As propriedades ótimas do DEA, com orientação para produto, decorrem de sua associação íntima com o estimador de máxima verossimilhança (MV) não-paramétrico da fronteira de produção. Nesse contexto, quer-se determinar medidas de bondade de ajuste (*goodness of fit*) para o modelo DEA, intervalos de confiança para os valores da fronteira de produção, realizar testes relativos à escala de operação da tecnologia subjacente ao processo produtivo e investigar fatores que causam eficiência.

A discussão levada a efeito neste artigo fornece respostas a essas perguntas e consiste de quatro partes. A Seção 2 explora a associação do modelo de produção DEA com modelos de produção teóricos. Visando lidar propriamente com o conceito de função de produção, restringe-se a discussão ao caso univariado com um único produto. A Seção 3 apresenta o modelo estatístico de produção para o qual a função de produção DEA é MV e os resultados assintóticos principais de consistência forte e convergência em distribuição. Na Seção 4, investigam-se as consequências desses resultados para estimação e testes de hipóteses sob os enfoques paramétricos e não-paramétricos. Finalmente, na Seção 5, considera-se uma aplicação na qual se tem por objetivo ajustar uma fronteira de produção a dados gerados por uma instituição de pesquisa.

## Função de Produção DEA

---



Considere um processo de produção com  $n$  unidades de produção. No jargão DEA, faz-se referência a essas unidades como “unidades tomadoras de decisão” (UTD). Cada UTD se utiliza de quantidades variáveis de  $s$  insumos para produzir um único produto  $y$ . Represente por  $Y = (y_1, \dots, y_n)$  o vetor de produção  $1 \times n$  e por  $X = (x_1, \dots, x_n)$  a matriz  $s \times n$  de uso de insumos no processo de produção. No que se segue, se  $w_1$  e  $w_2$  são vetores com componentes  $w_{i1}$  e  $w_{i2}$ , respectivamente, a notação  $w_2 \geq w_1$  significa que  $w_{i2} \geq w_{i1}$  para todo  $i$ . Note que o elemento  $y_r > 0$  representa a produção da UTD  $r$  e  $x_r \geq 0$ , com pelo menos um componente estritamente positivo, é o vetor  $s \times 1$  de insumos utilizado pela UTD  $r$  para produzir  $y_r$ . Cada um dos  $s$  insumos é efetivamente usado em pelo menos uma UTD, isto é, toda linha de  $X$  tem algum elemento positivo. Embora não seja estritamente necessário – valores (preço  $\times$  quantidades) são freqüentemente utilizados como *proxies* em aplicações de DEA (veja Coelli et al., 1998) –, assume-se que os insumos e o produto sejam medidos em quantidades físicas.

Seja  $K$  um subconjunto compacto, convexo e com interior não vazio do ortante não-negativo de  $R^s$ . O nível de produção máximo (fronteira) realizável com o uso de  $x \in K$  é determinado pela fun-

ção de produção  $y = g(x)$ . Supõe-se que  $g(x)$  seja contínua e que, adicionalmente:

1) Se  $x \geq w$  são vetores de  $K$ , então  $g(x) \geq g(w)$ .

2) Se  $x$  e  $w$  são vetores de  $K$  e  $t \in [0; 1]$ , então  $tg(x) + (1-t)g(w) \leq g(tx + (1-t)w)$ .

3) Para cada  $j = 1, \dots, n, x_j \in K, g(x_j) \geq y_j$ .

4) Com respeito à escala de operação da tecnologia definida por  $g(x)$  diz-se que:

(a)  $g(x)$  mostra retornos constantes à escala se  $g(\eta x) = \eta g(x)$  para todo  $\eta \geq 0$  e  $x \in K$  tal que  $\eta x \in K$ .

(b)  $g(x)$  mostra retornos crescentes à escala se  $g(\eta x) \geq \eta g(x)$  para todo  $\eta \geq 1$  e  $x \in K$  tal que  $\eta x \in K$ .

(c)  $g(x)$  mostra retornos decrescentes à escala se  $g(\eta x) \leq \eta g(x)$  para todo  $\eta \geq 1$  e  $x \in K$  tal que  $\eta x \in K$ .

(d)  $g(x)$  mostra retornos variáveis à escala se nenhuma das propriedades a), b) ou c) se verifica.

Como veremos mais tarde, pode-se utilizar o conjunto de observações  $(x_j, y_j)$  e o DEA para estimar  $g(x)$  somente para  $x$  em um dos conjuntos seguintes:

$$K_1^* = \left\{ x \in K; x \geq \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j, \lambda_j \geq 0 \right\},$$

$$K_2^* = \left\{ x \in K; x \geq \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j, \lambda_j \geq 0, \sum_{j=1}^n \lambda_j \geq 1 \right\},$$

$$K_3^* = \left\{ x \in K; x \geq \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j, \lambda_j \geq 0, \sum_{j=1}^n \lambda_j \leq 1 \right\},$$

$$K_4^* = \left\{ x \in K; x \geq \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j, \lambda_j \geq 0, \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \right\}.$$

Cada um desses conjuntos pressupõe uma escala de operação distinta para a função de produção DEA mostrada a seguir:  $K_1^*$  impõe retornos constantes,  $K_2^*$ , retornos crescentes,  $K_3^*$ , retornos decrescentes,  $K_4^*$  retornos variáveis.

**Proposição 1.** Os subconjuntos  $K_i^*$  são convexos e fechados em  $K$ .

**Demonstração:** Sejam  $x$  e  $w$  dois vetores em  $K_i^*$ . Pode-se encontrar vetores  $\lambda^1$  e  $\lambda^2$  satisfazendo as restrições impostas em  $K_i^*$  tais que  $x \geq \sum_j \lambda_j^1 x_j$  e  $w \geq \sum_j \lambda_j^2 x_j$ . Seja  $t \in [0; 1]$  e  $u = tx + (1-t)w$ . Claramente  $u \geq \sum_j (t\lambda_j^1 + (1-t)\lambda_j^2)x_j$ . Assim,  $u \in K_i^*$  e  $K_i^*$  é convexo. Seja agora  $x_m$  uma seqüência em  $K_i^*$  convergindo a  $x \in K$  e seja  $\lambda^m$  a seqüência correspondente de vetores que satisfazem as restrições de  $K_i^*$ . Existe uma constante  $b$  tal que  $\lambda_j^m x_{ji} \leq x_{mi} \leq b$ ,  $i = 1, \dots, s$ . Então  $\lambda_j^m \sup_i x_{ji} \leq b$ . Segue que  $\lambda^m$  é limitada e portanto admite uma subseqüência  $\lambda^{m_k}$  convergente para  $\lambda$ . O limite  $\lambda$  sa-

tisfaz as restrições de  $K_i^*$ . Também  $\sum_j \lambda_j^{m_k} x_j \leq x_{m_k}$  e segue que  $x \in K_i^*$ .  $\square$

Para  $x \in K_i^*$ , definimos a função

$$g_n^*(x) = \sup \left\{ \sum_j \lambda_j y_j; \sum_j \lambda_j x_j \leq x \right\},$$

em que o sup é restrito aos valores  $\lambda$  que satisfazem as restrições  $K_i^*$ .

A proposição seguinte estabelece uma ligação entre as soluções DEA orientadas para produto e  $g_n^*(x)$ .

**Proposição 2.** *Para cada  $r$ ,  $g_n^*(x_r) = \phi_r^* y_r$ , em que  $\phi_r^*$  é o valor ótimo do PPL  $\max_{\phi, \lambda} \phi$  sujeito a  $\sum_j \lambda_j y_j \geq \phi y_r$ ,  $\sum_j \lambda_j x_j \leq x_r$ , e, adicionalmente, a um dos seguintes conjuntos de restrições: a)  $\lambda \geq 0$  se  $g_n^*(x)$  mostra retornos constantes; b)  $\lambda \geq 0$  e  $\sum_j \lambda_j \geq 1$  se  $g_n^*(x)$  mostra retornos crescentes; c)  $\lambda \geq 0$  e  $\sum_j \lambda_j \leq 1$  se  $g_n^*(x)$  mostra retornos decrescentes; d)  $\lambda \geq 0$  e  $\sum_j \lambda_j = 1$  se  $g_n^*(x)$  mostra retornos variáveis.*

**Demonstração:** A função  $q(\lambda) = \sum_j \lambda_j y_j$  é contínua no conjunto compacto

$$\Lambda = \left\{ \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n); \sum_j \lambda_j x_j \geq x_r \right\},$$



em que os pontos de  $\Lambda$ , por hipótese, também satisfazem as restrições de  $K_i^*$ . Existe  $\lambda^{or} \in \Lambda$  tal que  $q(\lambda^{or}) = g_n^*(x_r)$ . Seja  $\phi_r^o$  tal que  $q(\lambda^{or}) = \phi_r^o y_r$ . Como o par  $(\lambda^{or}, \phi_r^o)$  é viável para o PPL, tem-se que  $\phi_r^* \geq \phi_r^o$ . Por sua vez,  $\phi_r^* \leq \phi_r^o$  pois se  $\lambda^{*r}$  é o vetor de pesos ótimos para o PPL, então  $\phi_r^* y_r = q(\lambda_r^*) \leq q(\lambda^{or}) = \phi_r^o y_r$ .  $\square$

Mostramos agora que a função  $g_n^*(x)$  é uma função de produção, isto é, satisfaz as Condições 1-4. Nesse contexto denominamos  $g_n^*(x)$  função de produção DEA.

**Proposição 3.** *A função  $g_n^*(x)$  é uma função de produção em  $K_i^*$  e tem a propriedade de extrapolação mínima, quer dizer, para qualquer outra função de produção  $g(x), x \in K$ , operando na mesma escala que  $g_n^*(x)$ , tem-se  $g(x) \geq g_n^*(x), x \in K_i^*$ .*

**Demonstração:** Mostra-se que  $g_n^*(x)$  é de extrapolação mínima para o caso de retornos crescentes. Os outros casos são semelhantes. Seja  $g(x)$  uma função de produção com retornos crescentes. Sejam  $x \in K$  e  $\lambda$  com componentes não-negativos tais que  $\sum_j \lambda_j \geq 1$  e  $x \geq \sum_j \lambda_j x_j$ . Como  $g(x)$  é monotônica,  $g(x) \geq g(\sum_j \lambda_j x_j)$ . Seja  $\eta = \sum_j \lambda_j$ .

Tem-se  $\eta \geq 1$  e  $g(\sum_j \lambda_j x_j) = g(\eta \sum_j (\lambda_j / \eta) x_j) \geq \eta g(\sum_j (\lambda_j / \eta) x_j) \geq \sum_j \lambda_j g(x_j) \geq \sum_j \lambda_j y_j$

Portanto,  $g(x) \geq g_n^*(x)$ .  $\square$

## Modelo Estatístico

---



Em aplicações,  $g(x)$  não é conhecida, e utiliza-se  $g_n^*(x)$  como seu estimador não-paramétrico. Suponha que  $g(x)$  e  $g_n^*(x)$  exibam a mesma escala de operação. Suponha adicionalmente que  $(x_j, y_j)$  satisfaça o modelo estatístico  $y_j = g(x_j) - \varepsilon_j$ , em que as ineficiências técnicas  $\varepsilon_j$  são variáveis aleatórias com distribuições absolutamente contínuas com densidades de probabilidades  $f_j(\varepsilon)$  monotonicamente decrescentes e concentradas em  $[0, +\infty)$ . As funções densidades de probabilidades usualmente empregadas para modelar ineficiências em modelos de fronteira satisfazem essa propriedade. Um exemplo óbvio é o determinado pela distribuição exponencial. A propriedade também será satisfeita por truncamentos positivos da normal  $N(\mu, \sigma^2)$  se  $\mu \leq 0$ .

Os insumos,  $x_j, j = 1, \dots, n$  são independentes e obtidos por amostragem das funções densidades de probabilidades  $h_j(x)$  que têm suporte contido em  $K$ . As ineficiências  $\varepsilon_j$  e os insumos  $x_j$  são independentes.

A função de verossimilhança para o modelo estatístico é dada por:

$$L(g) = \prod_{j=1}^n f_j(g(x_j) - y_j) h_j(x_j)$$

A proposição seguinte mostra que  $g_n^*(x)$  é um estimador não-paramétrico de máxima verossimilhança para  $g(x)$ .

**Teorema 1.** *Entre todas as funções de produção definidas em  $K_i^*$ ,  $g_n^*(x)$  maximiza  $L(g)$ . Qualquer outra função de produção  $g_o(x)$  tal que  $g_o(x_j) = g_n^*(x_j)$  também maximiza  $L(g)$ .*

**Demonstração:** Para qualquer função de produção  $g(x)$ , como  $g_n^*(x)$  é de extrapolação mínima  $g(x) \geq g_n^*(x)$  em  $K_i^*$ . Então  $g_n^*(x_j) - y_j \leq g(x_j) - y_j$ . Como  $g_n^*(x_j) - y_j \geq 0$  e  $f_j(\varepsilon)$  decresce com  $\varepsilon$  o resultado segue.  $\square$

**Teorema 2.** *Suponha que a seqüência de pares  $(x_j, \varepsilon_j)$  no modelo estatístico  $y_j = g(x_j) - \varepsilon_j$  seja gerada por observações independentes das funções densidades de probabilidade produto  $h_j(x)f_j(\varepsilon)$  em que:*

1) *A seqüência de densidades dos insumos  $h_j(x)$  satisfaz*

$$0 < l(x) \leq \inf_j h_j(x) \leq \sup_j h_j(x) \leq W(x)$$

*para funções integráveis  $l(x)$  e  $W(x)$  e  $x$  interior a  $K$ .*

2) *As funções densidades de probabilidades das ineficiências  $f_j(\varepsilon)$  são tais que*

$$F(u) = \inf_j F_j(u) > 0,$$

$$\text{em que } F_j(u) = \int_0^u f_j(\varepsilon) d\varepsilon$$

*e  $u > 0$ .*

Segue que, se  $x_0$  for um vetor de  $K_i^*$  interior a  $K$ ,  $g_n^*(x_0)$  converge quase certamente para  $g(x_0)$ .

**Demonstração:** Como  $g(x)$  é uma função contínua, dado  $\Delta > 0$  existe  $\delta_0 > 0$  tal que  $x \in B(x_0, \delta_0)$  implica  $g(x) > g(x_0) - \Delta$ . Seja

$$A(\delta) = \{(x, \varepsilon), x \in B(x_0, \delta) \text{ e } g(x) - \varepsilon > g(x_0) - \Delta\}.$$

Considere o evento  $A_j(\delta) = \{(x_j, \varepsilon_j) \in A(\delta)\}$ . Como as funções  $l(x)$  e  $W(x)$  são integráveis e  $g(x) - g(x_0) + \Delta > 0$  em  $B(x_0, \delta_0)$ , pode-se escolher  $0 < \delta < \delta_0$  tal que:

$$0 < \int_{B(x_0, \delta)} W(x) dx < 1,$$

$$0 < p = \int_{B(x_0, \delta)} l(x) F(g(x) - g(x_0) + \Delta) dx < 1$$

Faça  $p_j = P\{(x_j, \varepsilon_j) \in A(\delta)\}$ . Tem-se:

$$1 > \int_{B(x_0, \delta)} W(x) dx \geq \int_{B(x_0, \delta)} h_j(x) \left( \int_0^{g(x) - g(x_0) + \Delta} f_j(\varepsilon) d\varepsilon \right) dx$$

$$\geq \int_{B(x_0, \delta)} l(x) F(g(x) - g(x_0) + \Delta) dx,$$

e segue que  $0 < p \leq p_j < 1$  para todo  $j$ . Por construção  $g_n^*(x) \geq \text{Min}_j y_j$  para qualquer escala de operação admitida para a tecnologia subjacente. Assim, se  $(x_j, \varepsilon_j) \in A(\delta)$

$$y_j = g(x_j) - \varepsilon_j > g(x_0) - \Delta$$

e  $g_n^*(x_0) \geq \text{Min}_j y_j > g(x_0) - \Delta$ .

Então,  $g(x_0) - g_n^*(x_0) < \Delta$  e

$$\{g(x_0) - g_n^*(x_0) \geq \Delta\} \leq P\left\{\left(\bigcup_{j=1}^n A_j(\delta)\right)^c\right\} = P\left\{\bigcap_{j=1}^n A_j^c(\delta)\right\} \leq (1-p)^n.$$

A consistência forte segue da lei 0-1 de Borel-Cantelli.  $\square$

A Suposição 2 do Teorema 2 é satisfeita para distribuições do tipo exponencial com parâmetros de escala limitados inferiormente por uma constante positiva. O mesmo é verdade para a família gama  $\Gamma(r_j, \lambda_j) = \lambda^{r_j} x^{r_j-1} \exp(-\lambda_j x) / \Gamma(r_j)$  se os parâmetros  $\lambda_j$  e  $r_j$  pertencem a intervalos fechados  $[a, b]$  com  $0 < a < b$ . Também se verifica para o truncamento positivo da  $N(\mu_j, \sigma_j^2)$  se os parâmetros  $\mu_j$  e  $\sigma_j^2$  pertencem a intervalos limitados.

**Teorema 3.** *Suponha que as hipóteses 1 e 2 do Teorema 2 são satisfeitas e que  $x_j$  seja interior a  $K$  para todo  $j$ . Seja  $M$  um subconjunto fixo de UTDs definido pela escolha de algumas unidades entre as  $n$  unidades participantes da amostra. A distribuição conjunta, assintótica, das ineficiências técnicas DEA  $\varepsilon_{nj}^* = g_n^*(x_j) - y_j$ ,  $j \in M$ , coincide com a distribuição conjunta das ineficiências  $\varepsilon_j$ ,  $j \in M$ .*

**Demonstração:** Como  $g(x_j) \geq g_n^*(x)$ , tem-se:

$$\varepsilon_j = g(x_j) - y_j \geq g_n^*(x) - y_j = \varepsilon_{nj}^*.$$

Sejam  $E_j$  constantes e defina  $A_m = \bigcap_{j \in M} \{\varepsilon_j \leq E_j + 1/m\}$ . A seqüência  $A_m$  decresce para  $\bigcap_{j \in M} \{\varepsilon_j \leq E_j\}$ . Por sua vez, para todo  $m$ ,

$$\bigcap_{j \in M} \{\varepsilon_{nj}^* \leq E_j\} = \left[ \left( \bigcap_{j \in M} \{\varepsilon_{nj}^* \leq E_j\} \right) \cap A_m \right] \cup \left[ \left( \bigcap_{j \in M} \{\varepsilon_j \leq E_j\} \right) \cap A_m^c \right]$$

Então,

$$P\left(\bigcap_{j \in M} \{\varepsilon_{nj}^* \leq E_j\}\right) \leq P(A_m) + P\left(\left(\bigcap_{j \in M} \{\varepsilon_j \leq E_j\}\right) \cap A_m^c\right)$$

e, portanto,

$$P\left(\bigcap_{j \in M} \{\varepsilon_{nj}^* \leq E_j\}\right) \leq P(A_m) + \sum_{j \in M} P\left(\left\{\varepsilon_j - \varepsilon_{nj}^* > \frac{1}{m}\right\}\right)$$

Como

$$\varepsilon_j - \varepsilon_{nj}^* = \varepsilon_j - y_j + y_j - \varepsilon_{nj}^* = g(x_j) - g_n^*(x_j),$$

faça  $n, m \rightarrow \infty$  para obter pelo Teorema 2

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} P\left(\left\{\varepsilon_{nj}^* \leq E_j, \forall j \in M\right\}\right) \leq P(\{\varepsilon_j \leq E_j, \forall j \in M\})$$

Também

$$\bigcap_{j \in M} \{\varepsilon_j \leq E_j\} \subseteq \bigcap_{j \in M} \{\varepsilon_{nj}^* \leq E_j\}$$

Portanto,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} P\left(\left\{\varepsilon_{nj}^* \leq E_j, \forall j \in M\right\}\right) \geq P(\{\varepsilon_j \leq E_j, \forall j \in M\}) \quad \square$$

## Inferência Estatística

---



Teorema 3 é básico para o processo de inferência estatística no contexto do modelo de fronteira de produção determinístico. Permite o uso das abordagens paramétrica e não-paramétrica ao problema de inferência. Começa-se a discussão sobre o tema mostrando-se, em geral, como construir intervalos de confiança para as quantidades  $g(x_i)$ .

**Proposição 4.** *Sob as hipóteses do Teorema 2, seja  $\hat{q}_i$  tal que  $P\{\varepsilon_{ni}^* \leq \hat{q}_i\} = 1 - \alpha$ . O intervalo  $[g_n^*(x_i), g_n^*(x_i) + \hat{q}_i]$  tem, aproximadamente, nível pelo menos  $1 - \alpha$  para  $g(x_i)$ .*

**Demonstração:** Como  $g_n^*(x_i) \leq g(x_i)$ , segue que:

$$g_n^*(x_i) \leq g(x_i) - \varepsilon_i + \varepsilon_i = y_i + \varepsilon_i \leq g_n^*(x_i) + \varepsilon_i.$$

Portanto,  $0 \leq g(x_i) - g_n^*(x_i) \leq \varepsilon_i$ . Seja  $q_i$  o quantil de  $\varepsilon_i$  de ordem  $1 - \alpha$ . Como  $\varepsilon_i \leq q_i$  implica  $0 \leq g(x_i) - g_n^*(x_i) \leq q_i$ , segue-se que  $[g_n^*(x_i), g_n^*(x_i) + q_i]$  tem nível pelo menos  $1 - \alpha$ . Como para grande  $n$  grande  $\varepsilon_{ni}^* \sim \varepsilon_i$  pelo Teorema 3, o resultado segue.  $\square$

Outros tópicos em teoria da estimação e testes de hipóteses de interesse para a análise estatística do modelo de produção determinístico DEA dizem respeito a especificações alternativas do modelo de fronteira de produção. Nesse contexto, tem-se interesse em avaliar a bondade do ajuste do modelo de produção e na determinação da significância de fatores que causam ineficiências. As duas proposições seguintes tratam de instâncias particulares desses problemas quando as ineficiências são iid com distribuição comum exponencial ou meia-normal. Os resultados originalmente devem-se a Banker (1993). Aqui, os mesmos são refinados e incluem uma medida de bondade de ajuste.

**Proposição 5.** *Sob as hipóteses do Teorema 2, suponha que os  $\varepsilon_i$  sejam iid (independente e identicamente distribuídos) com densidade comum exponencial  $f(\varepsilon) = \lambda \exp\{-\lambda\varepsilon\}$ ,  $\lambda > 0$ ,  $\varepsilon > 0$ . Seja  $M$  um subconjunto de UTDs com  $m$  elementos. Então:*

1) *A quantidade  $2\lambda \sum_{i \in M} \varepsilon_{ni}^*$  tem, aproximadamente, distribuição qui-quadrado com  $2m$  graus de liberdade.*

2) *Se  $M$  é o conjunto de todas as UTDs, então*

$$\frac{2 \sum_{i=1}^n \varepsilon_{ni}^*}{s},$$

*em que  $s$  é o desvio-padrão dos resíduos estimados  $\varepsilon_{ni}^*$ , e tem, aproximadamente, distribuição qui-quadrado com  $2n$  graus de liberdade.*

**Demonstração:** Como as ineficiências  $\varepsilon_i$  são exponenciais iid com parâmetro  $\lambda$ , então



$2\lambda \sum_{i \in M} \varepsilon_i$  é qui-quadrado com  $2m$  graus de liberdade. Se  $M$  coincidir com a amostra a distribuição é qui-quadrado com  $2n$  graus de liberdade.

Seja  $F_n(u)$  a função de distribuição do qui-quadrado com  $2n$  graus de liberdade. Dados  $u, v > 0$ , como as densidades qui-quadrado são uniformemente limitadas, existe uma constante  $C$  tal que:

$$|F_n(u) - F_n(v)| \leq C |u - v|.$$

Seja  $\hat{F}_n(u)$  a função de distribuição de  $2 \sum_{i=1}^n \varepsilon_i / \rho$ , em que  $\rho$  é o desvio-padrão amostral dos  $\varepsilon_i$ . Como  $\hat{F}_n(u) = F_n(\lambda \rho u)$ , segue que:

$$|\hat{F}_n(u) - F_n(u)| \leq C |\lambda \rho - 1| u.$$

Os resultados 1 e 2 são portanto verdadeiros para as ineficiências  $\varepsilon_i$  uma vez que  $\rho$  é fortemente consistente para  $\lambda^{-1}$ . Pelo Teorema 3 são também válidos, aproximadamente, para os  $\varepsilon_{ni}^*$ .

**Proposição 6.** *Sob as hipóteses do Teorema 2, suponha os  $\varepsilon_i$  iid com distribuição comum com densidade meia-normal*

$$f(\varepsilon) = \left(2/\sqrt{2\pi\sigma}\right) \exp\{-\varepsilon^2/2\sigma^2\}, \quad \sigma > 0, \quad \varepsilon > 0.$$

Seja  $M$  um subconjunto qualquer de UTDs com  $m$  elementos, então:

1) A quantidade  $\sum_{i \in M} (\varepsilon_{ni}^*)^2 / \sigma^2$  tem, aproximadamente, distribuição qui-quadrado com  $m$  graus de liberdade.

2) Se  $M$  é o conjunto completo de DMUs, as quantidades

$$S_1 = \left( \frac{2}{\pi} \right) \frac{\sum_{i=1}^n (\varepsilon_{ni}^*)^2}{(\bar{\varepsilon}_n^*)^2}$$

e

$$S_2 = \left( 1 - \frac{2}{\pi} \right) \frac{\sum_{i=1}^n (\varepsilon_{ni}^*)^2}{s^2}$$

em que  $\bar{\varepsilon}_n^*$  e  $s^2$  representam a média e o desvio-padrão amostral dos  $\varepsilon_{ni}^*$ , respectivamente, têm, aproximadamente, distribuição qui-quadrado com  $n$  graus de liberdade.

**Demonstração:** Sob as hipóteses da proposição,  $\sum_{i \in M} \varepsilon_i^2 / \sigma^2$  é qui-quadrado com  $m$  graus de liberdade. Se  $M$  coincide com a amostra, a distribuição será chi-quadrado com  $n$  graus de liberdade. Como a média da distribuição meia-normal é  $\sigma\sqrt{2/\pi}$ , a variância é  $(1 - 2/\pi^2)\sigma^2$  e as densidades qui-quadrado são uniformemente limitadas, segue que os resultados 1 e 2 são verdadeiros para as ineficiências  $\varepsilon_i$ . Pelo Teorema 3, são também verdadeiros para  $\varepsilon_{ni}^*$ .  $\square$

Os resultados do item 2 das Proposições 4 e 5 dizem respeito essencialmente a medidas de bondade de ajuste e servem ao propósito de testar se as ineficiências são iid com a distribuição comum especificada (exponencial ou meia-normal). Um teste alternativo da mesma hipótese, com sabor não-paramétrico, pode ser levado a cabo quando a distri-

buição hipotetizada subjacente é exponencial. Esse é o teste de Lilliefors (Conover, 1998) que é uma estatística do tipo Kolmogorov-Smirnov. Um resultado análogo para a distribuição meia-normal não é do conhecimento do autor. Em qualquer caso, contudo, gráficos probabilísticos do tipo quantis-quantis (*QQ plots*) podem sempre ser usados na inspeção de desvios dessas especificações distribucionais (exponencial, meia-normal, etc.) de natureza paramétrica.

Os resultados do item 1 das Proposições 4 e 5 podem ser usados para avaliar diferenças em eficiência técnica entre dois grupos  $M_1$  e  $M_2$  de UTDs com  $m_1$  e  $m_2$  elementos respectivamente. Se os grupos não diferem, as razões

$$\frac{\sum_{i \in M_1} \varepsilon_{ni}^*}{\sum_{i \in M_2} \varepsilon_{ni}^*} \text{ e } \frac{\sum_{i \in M_1} (\varepsilon_{ni}^*)^2}{\sum_{i \in M_2} (\varepsilon_{ni}^*)^2}$$

têm distribuição  $F$  com  $(2m_1, 2m_2)$  e  $(m_1, m_2)$  graus de liberdade, respectivamente, dependendo da hipótese distribucional imposta para as ineficiências, isto é, exponencial ou meia-normal. O mesmo teste pode ser empregado para acessar a escala de operação de  $g(x)$  (não das UTDs individuais) sob a hipótese iid para os  $\varepsilon_i$ . Considere por exemplo o problema de testar se  $g(x)$  apresenta retornos à escala constantes. Sob a hipótese nula, quer dizer, sob retornos constantes, os resíduos calculados sob retornos variáveis ( $v$ ) se comportam de modo análogo aos resíduos sob retornos constantes ( $c$ ). Desse modo, as razões

$$\frac{\sum_{i \in M_1} \varepsilon_{ni}^{c*}}{\sum_{i \in M_2} \varepsilon_{ni}^{v*}} \text{ e } \frac{\sum_{i \in M_1} (\varepsilon_{ni}^{c*})^2}{\sum_{i \in M_2} (\varepsilon_{ni}^{v*})^2}$$

são aproximadamente  $F(2n, 2n)$  e  $F(n, n)$ , respectivamente, sob a hipótese nula.

O teste de Smirnov-Kolmogorov também pode ser usado para o teste da escala de operação com ineficiências iid quando não há interesse em modelar uma distribuição específica para as ineficiências. Nessa instância, se  $G_1(u)$  e  $G_2(u)$  são as funções de distribuição das ineficiências sob as hipóteses de retornos constantes e variáveis, respectivamente, quer-se testar  $H: G_1(u) = G_2(u)$  contra  $A: G_1(u) < G_2(u)$ , pois as ineficiências sob retornos constantes serão sempre maiores ou iguais que as ineficiências obtidas sob retornos variáveis.

O procedimento não-paramétrico padrão para a comparação de dois grupos de UTDs é o teste de Mann-Whitney (Conover, 1998). Para mais de dois grupos, a estatística apropriada é a de Kruskal-Wallis (Conover, 1998). Esses testes são robustos à presença de heteroscedasticidade e de observações atípicas (*outliers*) nos dados (Wonnacot & Wonnacot, 1984).

Faz-se mister observar aqui que os Teoremas 2 e 3 permitem especificações paramétricas mais flexíveis para a distribuição das ineficiências que aquelas sugeridas pelas Proposições 4 e 5. Suponha que  $z_0, \dots, z_l$  sejam variáveis que, acredita-se, potencialmente explicam ineficiências. Seguindo a abordagem de Coelli et al. (1998) na análise de fronteira de produção estocástica, postula-se que:

$$\varepsilon_i = z_{i0}\delta_0 + \dots + z_{il}\delta_l + e_i$$

em que os  $\delta_j$  são parâmetros desconhecidos, os  $z_{ij}$  são realizações de  $z_j$ , e  $e_i$  tem distribuição normal truncada  $N(0, \sigma^2)$  em  $-\mu_i$ , com  $\mu_i = z_{i0}\delta_0 + \dots + z_{ij}\delta_j$ . Essas suposições são consistentes com truncamentos não-negativos da  $N(\mu_i, \sigma^2)$ . Esse modelo pode ser estimado pelo método de máxima verossimilhança com os  $\varepsilon_{ni}^*$  substituindo os  $\varepsilon_i$ . Sabe-se que a média do truncamento positivo da  $N(\mu_i, \sigma^2)$  é

$$\mu_i + \sigma\lambda_i$$

e que a variância é

$$\sigma^2[1 - \lambda_i(\mu_i/\sigma + \lambda_i)]$$

em que 
$$\lambda_i = \frac{\phi(\mu_i/\sigma)}{\Phi(\mu_i/\sigma)},$$

com  $\phi(\cdot)$  e  $\Phi(\cdot)$  sendo as funções de densidade e de distribuição da normal padrão, respectivamente. Como a média e a variância são funções monotônicas de  $\mu_i$ , a formulação admite heteroscedasticidade. As comparações entre grupos no contexto estudado pelas Proposições 4 e 5 podem ser levadas a efeito nesse ambiente mais geral tomando os  $z_j$  como variáveis indicadoras. Permite-se qualquer número de grupos.

## Uma Aplicação

---



Sistema Embrapa de Pesquisa compõe-se de 37 centros de pesquisa. Esses centros estão distribuídos pelo País e são classificados segundo suas missões e objetivos de pesquisa como centros ecorregionais (e, 13 centros), centros de produto (p, 15 centros) e centros temáticos (t, 9 centros). A Empresa monitora 28 variáveis de produção e 3 variáveis de insumo em seu sistema de produção de pesquisa. Não se pretende descrever em detalhes a natureza dessas variáveis aqui. Apenas um breve resumo será apresentado. Uma descrição completa é encontrada em Souza et al. (1999). As variáveis de produção são classificadas em quatro categorias: Produção Científica (3), Produção de Publicações Técnicas (6), Desenvolvimento de Tecnologias, Produtos e Processos (8) e Difusão de Tecnologias e Imagem (11). A categoria de Produção Científica inclui a publicação de capítulos de livro, de artigos em periódicos com referato e de artigos e resumos em *proceedings* de congressos e reuniões técnicas. A categoria de Produção de Publicações Técnicas agrupa as publicações produzidas nos centros de pesquisa visando principalmente ao negócio e à produção agrícola. Típico dessa categoria são as instruções e recomendações técnicas que são publicações escritas em linguagem simplificada e dirigidas a extensionistas e fazendeiros. Tais publicações contêm recomendações técnicas com respeito a sistemas de produção agropecuária.

Na categoria de Desenvolvimento de Tecnologias, Produtos, e Processos, agrupam-se variáveis relacionadas ao esforço feito por uma unidade de pesquisa para tornar sua produção disponível para a sociedade na forma de um produto final. Típico dessa categoria é a produção de novas cultivares e variedades de planta. Finalmente, a categoria de Difusão de Tecnologias e Imagem inclui variáveis relacionadas ao esforço de uma unidade em tornar seus produtos conhecidos pelo público e ao marketing de sua imagem. Típico nessa categoria é a organização de dias de campo e de unidades de demonstração. O objetivo da primeira é a difusão de conhecimento, tecnologias, e inovações aos fazendeiros e extensionistas, e o da última, é o de demonstrar resultados de pesquisa já na forma de um produto acabado.

Os três insumos considerados são  $x_1$ -custos de pessoal,  $x_2$ -custos operacionais e  $x_3$ -custos de capital.

As variáveis de produção da Embrapa constam da Tabela 1. Uma única medida de produto é ali apresentada como resultado de uma média ponderada dos 28 índices de produção definidos pelo conjunto de variáveis de produto. Note-se que cada componente dessa média é um índice que mede desempenho relativamente a um ponto de referência. Dessa forma, a produção combinada dá informação sobre quanto cada centro de pesquisa desvia-se, em média, de um padrão básico especificado para todo o conjunto de variáveis de produto. Os insumos também estão medidos como índices relativos a um ponto de referência. Para os dados da Tabela 1, o ponto de referência para cada variável, quer se trate de insumo ou produto, foi escolhido como a média da Empresa no ano de 1999.

**Tabela 1.** Dados de produção da Embrapa, em 1999.

Unidade	Tipo	Produto ( $y$ )	Insumo ( $x_1$ )	Insumo ( $x_2$ )	Insumo ( $x_3$ )
1	t	1.771	2.050	2.690	2.575
2	p	0.965	0.879	0.593	0.614
3	t	1.235	0.648	0.704	0.866
4	p	1.414	1.434	0.904	1.188
5	t	1.027	1.055	1.731	0.881
6	p	0.460	0.626	0.462	0.539
7	t	1.166	0.324	0.458	0.580
8	p	1.055	0.996	0.731	0.893
9	p	0.560	1.099	1.323	1.242
10	p	1.620	1.466	0.894	1.392
11	p	1.717	1.053	0.970	1.160
12	t	0.971	0.848	1.488	1.324
13	p	1.173	1.122	1.689	0.752
14	p	2.349	1.626	2.097	1.652
15	t	1.362	0.915	0.620	0.987
16	p	0.956	0.833	0.995	1.112
17	p	2.192	1.466	1.501	1.892
18	p	1.043	1.196	0.722	0.968
19	t	0.924	0.411	0.492	0.741
20	p	0.375	0.646	0.762	0.942
21	e	0.746	1.194	1.895	0.915
22	e	3.222	2.093	1.389	1.825
23	e	1.391	1.760	1.220	2.043
24	e	0.465	0.552	0.786	0.624
25	e	0.724	0.341	0.359	0.344
26	e	0.671	0.613	0.571	0.440
27	e	0.518	0.361	0.368	0.385
28	e	0.699	1.140	0.918	0.876
29	e	0.955	0.542	0.590	0.443
30	e	0.175	0.567	0.448	0.650
31	e	0.394	0.896	0.916	0.608
32	e	0.969	1.412	1.575	0.781
33	e	2.060	2.794	1.919	1.942
34	p	0.848	0.656	0.508	0.874
35	p	0.239	0.468	0.527	0.509
36	t	1.436	0.745	0.880	1.229
37	t	0.274	0.173	0.326	0.210

A definição de um sistema de pesos que sirva ao propósito da obtenção de uma medida univariada representativa do *output* é uma tarefa difícil. No caso



da Embrapa, os pesos foram definidos como resultado de uma enquete que envolveu 500 pesquisadores e todos os administradores da Empresa. A cada participante do programa amostral pediu-se que manifestasse na escala 1 (menos importante) a 5 (mais importante) sua percepção sobre a importância de cada categoria de produção e de cada variável de produção em uma determinada categoria. O modelo postulado na análise desses dados é conhecido como Lei dos Julgamentos Categóricos e é derivado da Lei dos Julgamentos Comparativos proposta por Thurstone (1927). Essa lei teve seu uso popularizado em economia por McFadden (1974, 2001), que a utiliza para modelar preferências.

A Lei dos Julgamentos Categóricos tem por objetivo transformar a escala de percepção ordinal e individual dos avaliadores numa escala intervalar representativa da população da qual a amostra de avaliadores foi extraída. A importância relativa de cada variável pode então ser determinada tendo por base as diferenças estimáveis na escala contínua. Os resultados obtidos por esse processo são semelhantes aos gerados pelo método AHP de Saaty (1994). Mais detalhes em relação à Lei dos Julgamentos Categóricos (Comparativos) são encontrados em Torgerson (1958), Kotz & Johnson (1989), Nunnally & Bernstein (1994), Souza & Ávila (2000) e Souza (2001).

Ilustram-se agora os resultados teóricos da Seção 4. A Tabela 2 mostra as eficiências técnicas calculadas sob as hipóteses de retornos constantes (rc), retornos variáveis (vr), as estimativas  $g_n(x)$  dos valores da função de produção  $g(x)$  e os resíduos (evr)  $\varepsilon_{nj}$  calculados sob a hipótese de retornos

**Tabela 2.** Dados de produção da Embrapa, em 1999: eficiência técnica retornos constantes (cr); eficiência técnica retornos variáveis (vr); resíduos retornos variáveis (evr); fronteira estimada sob retornos variáveis ( $g_n(x)$ ); escala de operação (regiões de retornos decrescentes, crescentes e constantes).

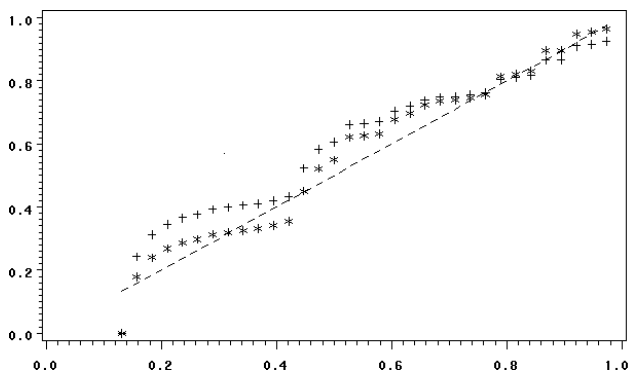
Unidade	Tipo	$g_n^*(x)$	cr	vr	evr	Escala
1	t	3.174	3.003	1.792	1.403	Decrescente
2	p	1.229	1.321	1.274	0.264	Decrescente
3	t	1.542	1.416	1.248	0.307	Decrescente
4	p	2.152	1.629	1.522	0.738	Decrescente
5	t	1.673	1.845	1.629	0.646	Decrescente
6	p	1.095	2.387	2.381	0.635	Decrescente
7	t	1.166	1.000	1.000	0.000	Constante
8	p	1.685	1.709	1.597	0.630	Decrescente
9	p	2.066	4.608	3.690	1.506	Decrescente
10	p	2.129	1.404	1.314	0.509	Decrescente
11	p	2.013	1.370	1.172	0.296	Decrescente
12	t	1.775	2.762	1.828	0.804	Decrescente
13	p	1.463	1.381	1.247	0.290	Decrescente
14	p	2.678	1.479	1.140	0.329	Decrescente
15	t	1.523	1.159	1.119	0.161	Decrescente
16	p	1.757	2.387	1.838	0.801	Decrescente
17	p	2.494	1.736	1.138	0.302	Decrescente
18	p	1.750	1.764	1.678	0.707	Decrescente
19	T	1.240	1.355	1.342	0.316	Decrescente
20	p	1.543	5.076	4.115	1.168	Decrescente
21	e	1.731	2.646	2.320	0.985	Decrescente
22	e	3.222	1.098	1.000	0.000	Decrescente
23	e	2.833	2.232	2.037	1.442	Decrescente
24	e	1.243	2.793	2.674	0.778	Decrescente
25	e	0.724	1.000	1.000	0.000	Constante
26	e	0.945	1.410	1.408	0.274	Decrescente
27	e	0.764	1.541	1.475	0.246	Constante
28	e	1.664	2.639	2.381	0.965	Decrescente
29	e	0.955	1.000	1.000	0.000	Constante
30	e	1.122	6.536	6.410	0.947	Constante
31	e	1.227	3.322	3.115	0.833	Decrescente
32	e	1.509	1.736	1.558	0.540	Decrescente
33	e	3.224	1.965	1.565	1.164	Decrescente
34	p	1.277	1.524	1.506	0.429	Decrescente
35	p	1.058	4.444	4.425	0.819	Decrescente
36	t	1.654	1.560	1.152	0.218	Decrescente
37	t	0.274	1.585	1.000	0.000	Constante

variáveis. Os cálculos foram levados a efeito com o uso do software DEAP v 2.1 (Coelli et al., 1998).

A Tabela 3 mostra os valores das estatísticas de bondade de ajuste para evr (resultado 2 das Proposições 5 e 6) para o caso iid com hipóteses distribucionais exponencial e meia-normal. Rejeita-se a hipótese exponencial, mas não há evidência suficiente para rejeitar a distribuição meia-normal. Na Fig. 1, mostra-se o nível dos dois ajustes por meio do gráfico de quantis. A mensagem do gráfico é a de que a distribuição meia-normal realmente se ajusta melhor aos dados. O teste estatístico também indica que a variável tipo de centro de pesquisa não afeta a ineficiência técnica significativamente.

**Tabela 3.** Bondade do ajuste para as distribuições exponencial e meia-normal.

Distribuição	gl	Qui-quadrado	Valor p
Exponencial	74	101.03	0.020
Meia-normal ( $S_1$ )	37	35.85	0.523
Meia-normal ( $S_2$ )	37	38.14	0.417



**Fig. 1.** Gráficos de quantis (*QQ plots*) para evr: exponencial (+) e meia-normal (\*).

Para ilustrar um modelo com uma especificação heteroscedástica, como na Seção 4, e, concomitantemente, visando acumular evidência adicional, dando suporte aos resultados acima, ajustou-se aos resíduos  $\varepsilon_{ni}^*$  o truncamento positivo da normal  $N(\mu_i, \sigma^2)$  com

$$\mu_i = \delta_0 + \delta_1 D_{i1} + \delta_2 D_{i2},$$

em que  $D_{i1}$  e  $D_{i2}$  são as realizações das variáveis indicadoras dos grupos t e p respectivamente. Esse modelo foi estimado pelo método de máxima verossimilhança com o uso do PROC NLMIXED do SAS versão V8.2. A hipótese nula  $\delta_0 = \delta_1 = \delta_2 = 0$  implica a especificação meia-normal para as ineficiências e nenhum efeito de tipo. O teste é levado a efeito com o uso da razão de verossimilhança. Dois modelos estão envolvidos. O modelo completo sem restrições nos parâmetros e o modelo reduzido que impõe  $\mu_i = 0$  para todo i. Vê-se na Tabela 4 que não há evidência para a rejeição da hipótese nula.

**Tabela 4.** Teste da razão de verossimilhança de  $\delta_0 = \delta_1 = \delta_2 = 0$ .

Modelo	-2 log verossimilhança	dif	gl	Valor p
Completo	27.10	-	-	
Reduzido (meia-normal)	28.90	1.80	3	0.614

Embora não tenham sido detectadas diferenças de tipo na análise conjunta e, desse modo, nenhum teste adicional seja necessário, a título de completude, mostram-se as comparações entre os pares de tipos na Tabela 5. Como esperado, em face dos resultados anteriores, nenhuma das estatísticas é significativa.

**Tabela 5.** Valores da estatística F para comparações de grupos sob a hipótese de distribuição meia-normal. Nenhum é significativo no nível de 5%.

Tipo de unidade	E	P	T
E	-	1.197	1.670
P	-	-	1.396

Como a hipótese de ineficiências iid com densidade comum meia-normal não é rejeitada, pode-se determinar intervalos de confiança individuais para  $g(x_i)$  com coeficiente de confiança de pelo menos 95%. Esses intervalos são obtidos simplesmente somando-se a quantidade  $\hat{q} = 1.96\hat{\sigma} = 1.4$  a  $g_n^*(x_i)$ . A quantidade  $\hat{\sigma}^2 = 0.5117$  é a estimativa de máxima verossimilhança de  $\sigma^2$ .

Consideram-se agora questões de escala de operação. A Tabela 6 mostra testes paramétricos e não-paramétricos da hipótese de retornos constantes (versus retornos variáveis). Note que esse é um teste global que diz respeito à função  $g(x)$  e não um teste relativo à escala de operação dos centros de pesquisa individuais. O teste não-paramétrico unicaudal não rejeita a hipótese de retornos constantes ao nível de

5%, mas o resultado é marginal. A utilização da métrica herdada da densidade meia-normal rejeita a hipótese no mesmo nível. Desse modo, somos levados a assumir a hipótese mais geral de retornos variáveis.

**Tabela 6.** Testes paramétricos e não-paramétricos da hipótese de retornos constantes versus retornos variáveis.

Distribuição	Estatística	Valor crítico (5%)
Livre (Smirnov-Kolmogorov)	D = 0.216	0,270
Meia-normal	F = 2.469	1,730

Na análise DEA, é possível identificar a região de operação de cada UTD relativamente à função de produção estimada  $g_n(x)$  obtida sob a hipótese de retornos variáveis. Cada UTD é identificada como operando nas regiões de rendimentos crescentes, decrescentes ou constantes (ótimos) segundo os critérios seguintes. Se uma UTD é eficiente sob a hipótese de retornos constantes, diz-se que ela opera na região de retornos constantes. Se a estimativa de eficiência DEA da UTD obtida sob a restrição  $K_3$  (retornos decrescentes) difere da estimativa sob a restrição  $K_4$  (retornos variáveis), diz-se que a UTD ineficiente opera na região de retornos crescentes. Se essas duas medidas de ineficiência coincidem, diz-se que a UTD ineficiente opera sob retornos decrescentes. Os resultados sobre escala de operação que encontramos para os dados da Tabela 1 encontram-se na Tabela 2.

A classificação dada na Tabela 2 é importante por razões administrativas, pois fornece indicação das ações de produção que podem ser implementadas por uma unidade ineficiente para se tornar mais eficiente. Se um par de observações  $(x, y)$  é ineficiente e está situado em uma região de retornos crescentes, a indicação é de que  $y_i$  é muito pequeno para que a unidade seja eficiente. Ademais, se o par está situado em uma região de retornos decrescentes,  $x_i$  é muito grande para que a unidade possa ser eficiente. No primeiro caso, a recomendação óbvia é portanto o aumento de produção provavelmente acompanhado de um aumento no nível de uso de insumos, e, no segundo, o programa adequado é o de redução de gastos com insumos. Veja Färe et al. (1994) para mais detalhes sobre esse assunto.

Conclui-se esta seção com a discussão de um procedimento sugerido por Brocket & Golany (1996) para avaliar diferenças em eficiências entre dois grupos de UTDs. O procedimento se aplica a modelos com insumos e produtos múltiplos, é não-paramétrico e serve ao propósito de ilustração adicional de algumas das análises empíricas viáveis no contexto DEA. A idéia do teste é a de comparar processos ou programas de produção ao invés das eficiências técnicas originais. Esse objetivo é alcançado em dois passos. Primeiramente, leva-se a efeito uma análise DEA interna a cada grupo. As unidades ineficientes são então projetadas nas fronteiras dos respectivos grupos. Essas projeções são as quantidades  $g_n^*(x_i)$  obtidas dentro de cada grupo. Tais produções são eficientes já que representam o máximo de produção realizável no grupo, dado o nível de utili-

zação de insumos dentro do grupo. Com esses valores projetados, estima-se um DEA global. As eficiências técnicas assim corrigidas são avaliadas quanto à diferença entre grupos por meio de testes não-paramétricos. Os testes indicados são os de Mann-Whitney e Kruskal-Wallis (Conover, 1998), respectivamente, dependendo se dois ou mais grupos estão envolvidos na comparação de interesse.

Para os dados da Embrapa, embora um efeito significativo de tipo não tenha sido encontrado para as ineficiências não projetadas, diferenças programáticas existem. O teste de Kruskal-Wallis global é significativo como também o de Mann-Whitney para todas os três pares de comparação de interesse T-E, T-P e E-P. Encontra-se que P e T dominam E e que P domina T. Dominância no sentido não-paramétrico aqui descrito significa maior posição ou posto (*rank*) de ineficiência média e por conseguinte menos eficiência, uma vez que estamos lidando com medidas DEA orientadas para produto.

## Conclusão

---



emonstrou-se que os estimadores DEA de funções de produção têm a propriedade da máxima verossimilhança, são fortemente consistentes, e convergem em distribuição sob hipóteses que não excluem a possibilidade de heteroscedasticidade. O conjunto de



suposições distribucionais mais fracas quanto ao comportamento dos resíduos imposto para a obtenção desses resultados representa a diferença principal relativamente aos resultados de Banker (1993). O contexto no qual os resultados estatísticos são derivados é determinístico, pois os únicos componentes estocásticos permissíveis no modelo de produção são resultado de tão-somente ineficiências técnicas. Os resultados obtidos são assintóticos e permitem a implementação de uma estratégia de modelagem flexível para a explicação de ineficiências por meio do uso da análise de regressão. A abordagem é derivada da distribuição normal truncada e também não exclui heteroscedasticidade.

Foram obtidos procedimentos estatísticos simples, de natureza paramétrica, para a avaliação de desvios do modelo de produção relativamente à fronteira determinística com ineficiências iid, com distribuição meia-normal ou com ineficiências iid exponenciais. Se uma dessas hipóteses distribucionais se verifica, é possível avaliar também a escala de operação e classificações de interesse no conjunto de UTDs, por meio de testes estatísticos paramétricos e não-paramétricos.

Finalmente, os resultados teóricos foram aplicados na avaliação do processo de produção de uma instituição estatal – a Embrapa, que é responsável por grande parte da pesquisa agrícola levada a cabo no Brasil. Nessa aplicação, há evidência de que o modelo de produção seja determinístico e que tenha ineficiências iid com densidade comum meia-normal. Encontrou-se evidência contra retornos constantes e admitiu-se que o modelo determinístico

mostra retornos variáveis. Concluiu-se também que as ineficiências técnicas não diferem entre tipos de UTDs (centro de pesquisa), mas mostram diferenças programáticas significantes.

## Referências

---



ARNOLD, V.; BARDAN, I. R.; COOPER, W. W.; KUMBHAKAR, S. C. New uses of DEA and statistical regressions for efficiency evaluation and estimation – with an illustrative application to public secondary schools in Texas. **Annals of Operations Research**, v. 66, p. 225-278, 1994.

BANKER, R. D. Maximum likelihood, consistency and DEA: a statistical foundation. **Management Science**, v. 39, n. 10, p. 1265-1273, 1993.

BROCKET, P. L.; GOLANY, B. Using rank statistics for determining programmatic efficiency differences in data envelopment analysis. **Management Sciences**, v. 42, n. 3, p. 466-472, 1996.

CHARNES, A.; LEWIN, A. L.; SEIFORD L. M. **Data envelopment analysis: theory, methodology and applications**. Boston: Kluwer, 1995.

COELLI, T.; RAO, D. S. P.; BATESE, G. E. **An introduction to efficiency and productivity analysis**. Boston: Kluwer, 1998.

CONOVER, W. J. **Practical nonparametric statistics**. New York: Wiley, 1998.

COOPER, W. W.; SEIFORD L. M.; TONE, K. **Data envelopment analysis: a comprehensive text with models, applications, references and DEA-solver software**. Boston: Kluwer, 2000.

FÄRE, R.; GROSSKPOF, S.; LOVEL, C. A. K. **Production frontiers**. New York: Cambridge University Press, 1994.

KOTZ, N.; JOHNSON, L. Thurstone's theory of comparative judgment. **Encyclopedia of Statistical Sciences**, v. 9, p. 237-239, 1989.

LÖTHGREN, M. **On the consistency of the DEA-based average technical efficiency Bootstrap**. Stockholm: Stockholm School of Economics, 1997. (Working Paper Series in Economics and Finance, 179).

MCFADDEN, D. Conditional logit analysis of qualitative choice behavior. In: ZAREMBKA, P. **Frontiers in econometrics**. New York: Academic Press, 1974.

MCFADDEN, D. **Economic choices: economic decisions of individuals**. Charter Day keynote address. Berkeley: University of California at Berkeley, 2001.

NUNALLY, J. C.; BERSTEIN, I. H. **Psychometric theory**. 3th ed. New York: McGraw-Hill, 1994.

PARK, B. U.; SIMAR L.; WEINER, C. The FDH estimator for productivity efficiency scores, **Econometric Theory**, v. 16, p. 855-877, 2000.

SAATY, T. L. **The analytic hierarchy process**. Pitisburg: RWS, 1994.

SEIFORD, L. M.; THRALL, R. M. Recent developments in DEA, the mathematical programming approach to frontier analysis. **Journal of Econometrics**, v. 46, p. 7-38, 1990.

SIMAR L; WILSON, P. W. Sensitivity analysis of efficiency scores: how to bootstrap in nonparametric frontier models. **Management Science**, v. 44, n. 1, p. 49-61, 1998.

SOUZA, G. S. **The law of categorical judgment revisited**. Brasília: Embrapa, 2001. (SEA Working Paper).

SOUZA, G. S.; ALVES, E.; ÁVILA, A. F. D. Technical efficiency in agricultural research. **Scientometrics**, v. 46, p. 141-160, 1999.

SOUZA, G. S.; ALVES, E.; ÁVILA, A. F. D.; CRUZ, E. R. Produtividade e eficiência relativa de produção em sistemas de produção de pesquisa agropecuária. **Revista Brasileira de Economia**, v. 51, n. 3, p. 281-307, 1997.

SOUZA, G. S.; ÁVILA, A. F. D. A psicometria linear da escalagem ordinal: uma aplicação na caracterização da importância relativa de atividades de produção em ciência e tecnologia. **Cadernos de Ciência e Tecnologia**, v. 17, n. 3, p. 11-27, 2000.

THURSTONE, L. L. A law of comparative judgments. **Psychological Review**, v. 34, p. 273-286, 1927.

TORGERSON, W. S. **Theory and methods of scaling**. New York: Wiley, 1958.

WONNACOT, T. H.; WONNACOT, R. J.  
**Introductory statistics for business and  
economics.** 3th ed. New York: Wiley, 1984.

## **Títulos lançados:**

Nº 1 – A pesquisa e o problema de pesquisa: quem os determina?

*Ivan Sergio Freire de Sousa*

Nº 2 – Projeção da demanda regional de grãos no Brasil: 1996 a 2005

*Yoshihiko Sugai, Antonio Raphael Teixeira Filho, Rita de Cássia Milagres Teixeira Vieira e Antonio Jorge de Oliveira*

Nº 3 – Impacto das cultivares de soja da Embrapa e rentabilidade dos investimentos em melhoramento

*Fábio Afonso de Almeida, Clóvis Terra Wetzel e Antonio Flávio Dias Ávila*

Nº 4 – Análise e gestão de sistemas de inovação em organizações públicas de P&D no agronegócio

*Maria Lúcia D'Apice Paez*

Nº 5 – Política nacional de C&T e o programa de biotecnologia do MCT

*Ronaldo Mota Sardenberg*

Nº 6 – Populações indígenas e resgate de tradições agrícolas

*José Pereira da Silva*

Nº 7 – Seleção de áreas adaptativas ao desenvolvimento agrícola, usando-se algoritmos genéticos

*Jaime Hidehiko Tsuruta, Takashi Hoshi e Yoshihiko Sugai*

Nº 8 – O papel da soja com referência à oferta de alimento e demanda global

*Hideki Ozeki, Yoshihiko Sugai e Antonio Raphael Teixeira Filho*

Nº 9 – Agricultura familiar: prioridade da Embrapa

*Eliseu Alves*

Nº 10 – Classificação e padronização de produtos, com ênfase na agropecuária: uma análise histórico-conceitual

*Ivan Sergio Freire de Sousa*

Nº 11 – A Embrapa e a aqüicultura: demandas e prioridades de pesquisa

*Júlio Ferraz de Queiroz, José Nestor de Paula Lourenço e Paulo Choji Kitamura (eds.)*

Nº 12 – Adição de derivados da mandioca à farinha de trigo: algumas reflexões

*Carlos Estevão Leite Cardoso e Augusto Hauber Gameiro*

Nº 13 – Avaliação de impacto social de pesquisa agropecuária: a busca de uma metodologia baseada em indicadores

*Levon Yeganiantz e Manoel Moacir Costa Macêdo*

Nº 14 – Qualidade e certificação de produtos agropecuários

*Maria Conceição Peres Young Pessoa, Aderaldo de Souza Silva e Cilas Pacheco Camargo*

Nº 15 – Considerações estatísticas sobre a lei dos julgamentos categóricos

*Geraldo da Silva e Souza*

Nº 16 – Comércio internacional, Brasil e agronegócio

*Luiz Jésus d'Ávila Magalhães*

*Produção editorial, impressão e acabamento*  
***Embrapa Informação Tecnológica***



**Embrapa**

Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária  
Secretaria de Administração Estratégica

GU  
q y i k p  
A s k d  
V z b f  
G T f  
G w  
M

**T**exto  
para  
D**iscussã**o

Ministério da Agricultura,  
Pecuária e Abastecimento

**BRASIL**  
UM PAÍS DE TODOS

CGPE 3536