

AJUSTAMENTO DE MODELOS ESTATÍSTICOS EXPONENCIAIS AO CRESCIMENTO DE GADO NELORE AJUSTAMENTO E ASPECTOS COMPUTACIONAIS¹

ARTÊMIO LUDWIG², MARTINHO DE ALMEIDA E SILVA³
& LAEDE MAFIA DE OLIVEIRA⁴

RESUMO - Foram utilizadas as pesagens bimestrais de 697 animais para estudar o ajustamento dos parâmetros dos seguintes modelos ao crescimento de gado Nelore: Brody, Bertalanffy, Gompertz, e Logístico. Os quatro modelos foram linearizados pela série de Taylor e o processo iterativo foi acelerado pela técnica dos "quadrados mínimos internos". Todos os modelos apresentaram coeficientes de determinação próximos de 99%. No modelo Brody, o processo iterativo foi mais lento, sendo obtidas muitas estimativas de parâmetros que foram irrealistas na representação biológica da característica, apesar de a aderência do modelo ter sido alta. O número de pesagens por animal foi um dos fatores que mais influenciaram os ajustamentos. Além disto, alterações mais fortes na taxa de crescimento do animal, principalmente nas últimas pesagens, provocaram dificuldades no ajustamento e estimativas menos precisas para os parâmetros.

Termos para indexação: curvas de crescimento, modelos não-lineares.

STATISTICAL EXPONENTIAL MODELS ADJUSTMENT TO THE GROWING OF NELORE CATTLE. ADJUSTMENT AND COMPUTATIONAL ASPECTS.

ABSTRACT - Weight records of 697 Nelore animals were used to fit four non-linear models (Brody, Bertalanffy, Gompertz and Logistic models) to Nelore cattle growth. Taylor's series with the "internal least squares" technique was used to estimate the parameters for each of the four non-linear models. These models were approximately equal to 99%. Brody's model had the slowest convergency and in this model many of the parameter estimates had no biological importance for interpretation. The number of weight records of each animal as well as the animal's latest age or weight had the highest influence in the fitting. In addition, changes in the animal growth index, mainly at later stages, resulted in computational difficulties and less precise parameter estimates.

Index terms: growth curves, non-linear models.

INTRODUÇÃO

O interesse pelos modelos estatísticos de crescimento que relacionam o peso de um indivíduo com a sua idade tem aumentado nos últimos anos. Estes modelos vêm sendo desenvolvidos tanto para pequenos quanto para grandes animais.

O estudo do crescimento por meio do ajustamento de um modelo estatístico que descreva todo

o período de vida do animal torna-se mais informativo para os pesquisadores, uma vez que tal modelo condensa as informações de uma série de dados de peso/idade num pequeno conjunto de parâmetros biologicamente interpretáveis e com propriedades matemáticas que permitem descrever diferenças com maior precisão do que aquelas que, até então, têm sido feitas (Laird & Howard 1967).

O conhecimento preciso de taxas de crescimento, taxas de ganho, grau de maturidade, tamanho à maturidade e outras características correlacionadas é facilmente obtido de um modelo de crescimento. Geralmente o criador tem conhecimento do melhor padrão de crescimento para seu rebanho, mas só atingirá seu objetivo mediante estimativas reais destas características.

Além disso, quando o crescimento é encarado sob este aspecto, torna-se possível obter previsões

¹ Aceito para publicação em 10 de dezembro de 1980.
Parte da tese apresentada pelo primeiro autor à Universidade Federal de Viçosa, como um dos requisitos do curso de Mestrado em Zootecnia.
² B. Mat., M. Zoot., Centro Nacional de Pesquisa de Suínos e Aves (CNPISA)-EMBRAPA, Caixa Postal, D-3, CEP 89.700 - Concórdia, SC.
³ Eng^o Agr^o, Ph.D., Universidade Federal de Viçosa (UFV), CEP 36.570 - Viçosa, MG.
⁴ Eng^o Agr^o, M.Sc. UFV, Viçosa, MG.

do tamanho das matrizes e touros que são mantidos no plantel de reprodução, e isto representa, em rebanhos mais especializados, um alto valor na produção.

O objetivo deste trabalho foi analisar o ajustamento de quatro modelos estatísticos ao crescimento de animais Nelore no aspecto computacional e qualidade de ajuste:

MATERIAL E MÉTODOS

Modelos de crescimento

Muitos autores trabalharam na determinação e no ajustamento de modelos estatísticos que descrevem o crescimento de animais e plantas. O enfoque do assunto nem sempre foi o mesmo. Assim, um modelo poderia descrever o diferencial de crescimento entre duas partes do organismo do animal, a relação entre o tempo e o peso de um órgão, entre o tempo e o peso do animal como um todo, ou ainda entre o tempo e o tamanho de determinado órgão. Em plantas, funções exponenciais têm sido usadas quer na descrição do crescimento, quer como funções de produção, medindo respostas a fertilizantes.

Grande variedade de modelos usados para descrever o crescimento é encontrada na literatura. A maior parte destes modelos estatísticos não-lineares podem ser derivados do modelo matemático de Richards (1959),

$$Y_t = A (1 - Be^{-Kt})^{1/(1-m)}, \quad (1)$$

atribuindo-se valores específicos a B, K ou m. Este modelo foi obtido partindo-se da premissa de que a taxa de anabolismo é proporcional à m-ésima potência do peso atingido pelo animal, enquanto a taxa de catabolismo é proporcional ao seu próprio peso. Desta forma, a taxa de crescimento em peso torna-se a diferença entre estas duas quantidades, ou seja, $ny^m - ky$ onde n e k são constantes de anabolismo e catabolismo, respectivamente, e y é o peso do animal. Quando $m = 1$,

$$dy_t/dt = (n - k)y.$$

A integração desta equação diferencial, após algumas simplificações, resulta na equação (1).

Os quatro modelos estudados neste trabalho apresentam três parâmetros. O modelo Brody,

$$y_t = A - Be^{-Kt},$$

que é um modelo exponencial simples, admite que a taxa de crescimento é decrescente e que o animal tende para o peso máximo A, quando t tende a infinito. Sua forma exponencial assintótica assemelha-se bastante ao modelo de Mitcherlich, usado para estimar respostas à adubação.

O modelo Bertalanffy é obtido substituindo-se m por 2/3 na equação (1), quando se obtém:

$$y_t = A (1 - Be^{-Kt})^{3/2}.$$

O parâmetro A estima o peso "adulto" do animal e K é uma medida de crescimento. Este modelo apresenta formato sigmóide com um ponto de inflexão no tempo $t = (1/3)K^{-1}$, quando $y_t = (8/27)A$.

O modelo Gompertz, proposto por Laird (1965), tem a seguinte forma:

$$y_t = y_0 e^{L(1 - e^{-\alpha t})/\alpha}.$$

Diferentes formas também atribuídas a Gompertz são encontradas na literatura (Grosenbauch 1965, Silveira 1976, Fitzhugh 1976), mas todas apresentam a forma exponencial dupla que as caracteriza.

O modelo Gompertz apresenta três parâmetros cujas interpretações diferem das apresentadas pelos parâmetros dos modelos Brody e Bertalanffy. Aqui, y_0 é o peso inicial para o período estudado, L é a taxa de crescimento inicial específica e α mede a taxa de decréscimo exponencial de L (Laird & Howard 1967). Seu formato é sigmoidal, com um ponto de inflexão quando o animal atinge 0,37 de seu peso adulto.

Nelder (1961) propôs um modelo que deu origem à função Logística:

$$y_t = A (1 + e^{-Kt})^{-M},$$

que é equivalente à equação (1), fazendo-se $B = 1$ e deixando o expoente $1/(1 - m)$ como novo parâmetro a ser estimado.

Este modelo também apresenta o formato sigmóide, com um ponto de inflexão que representa o ponto de máximo crescimento.

Origem dos dados

Os dados utilizados neste trabalho foram obtidos do rebanho Nelore da subestação da CODEVASF, em Brasília, MG, município de João Pinheiro, no período de 1969 a 1975. Até fins de 1975, as pesagens bimestrais efetuadas no rebanho proporcionaram uma amostra bem variada de indivíduos, com relação ao número de informações necessárias para o presente trabalho.

Alguns animais foram pesados apenas ao nascimento, enquanto outros foram pesados do nascimento até um ano de idade, quando foram descartados por motivos diversos. Os intervalos entre pesagens, teoricamente bimestrais, nem sempre tiveram esta amplitude, variando de 1,5 a 2,5 meses. Em determinados animais, estes intervalos atingiram até cinco ou seis meses. Além disto, os machos apresentaram, em média, menor número de pesagens, visto serem descartados nos leilões periódicos da subestação, entre a desmama e os dois anos de idade,

enquanto grande parte das fêmeas permanecia no rebanho para reposição do plantel.

Os parâmetros das quatro funções de crescimento foram ajustados para as pesagens de 697 animais, machos e fêmeas, que apresentavam oito ou mais pesagens, incluindo o peso ao nascer.

A metodologia usada foi descrita por Draper & Smith (1966), onde os autores apresentaram o processo de maneira generalizada para uma função de k variáveis independentes e p parâmetros a serem estimados. Maiores detalhes podem ser vistos em Ludwig (1977).

Para o ajustamento dos parâmetros, cada modelo foi acrescido do erro aleatório, tornando-se assim um modelo estatístico.

O mesmo programa foi usado para ajustar todos os modelos, pois apresentavam o mesmo número de parâmetros. Apenas as derivadas parciais e modelos, juntamente com os valores iniciais para as estimativas dos parâmetros, foram alterados.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Um dos problemas encontrados em ajustamentos de modelos de crescimento é a disponibilidade de pesagens. Neste estudo, muitos animais não foram aproveitados por insuficiência de dados. Estabeleceu-se um número mínimo de oito pesagens por animal, para se efetuar o ajustamento. Esta condição não foi suficiente, porque o processo iterativo não convergia nos casos em que o animal fora pesado oito vezes, ou mais, com sua primeira pesagem aos seis meses de idade. Neste caso, observou-se que a facilidade de ajustamento aumentava com o decréscimo da idade na qual o primeiro peso havia sido tomado. Para homogeneização da amostra, pelo menos no início da vida do animal, utilizaram-se somente os indivíduos que apresentavam oito ou mais pesagens, incluindo o peso ao nascimento.

No modelo Brody, não foi possível estimar os parâmetros para seis animais, porque o processo iterativo forneceu estimativas do parâmetro K que posicionavam o expoente $-Kt$ fora do intervalo $-174 \leq -Kt \leq 180$, excedendo a capacidade operacional do computador.

A análise das pesagens destes indivíduos acusou irregularidades nos dados, apenas em alguns casos. Entretanto, os problemas de ajustamentos encontrados nos modelos Bertalanffy e Gompertz estavam sempre relacionados a irregularidades nas pesagens dos animais. Draper & Smith (1966) citam

que este tipo de problema pode ocorrer no processo iterativo de funções linearizadas.

Maiores dificuldades de ajustamento foram encontradas para o modelo logístico quando comparado aos demais, porque, além da limitação do expoente $-Kt$, como no modelo Brody, a expressão $(1 + e^{-Kt})^{-M}$ é calculada pelo $\ln(1 + e^{-Kt})$. No modelo Logístico não foi possível a obtenção das estimativas dos parâmetros para, aproximadamente, 25 animais, que apresentavam, à semelhança do modelo Brody, tanto pesagens quanto irregularidades na série de pontos peso/idade.

A fim de padronizar as análises estatísticas com relação ao número de animais, permitindo melhores comparações, somente foram utilizados indivíduos para os quais foi possível estimar os parâmetros em todos os modelos e que possuísem informações de "pedigree". Desta forma, restaram apenas 244 fêmeas e 187 machos para comparações de ajustamentos.

No ajustamento da função Brody foram obtidas estimativas biologicamente absurdas para o valor assintótico. Em alguns casos, as estimativas de A alcançaram valores superiores a 10.000 kg. Aproximadamente 7% dos animais apresentaram estimativas de pelo assintótico acima de 1.500 kg, e 60% destes, com $A \geq 4.000$ kg, ocorrendo mais nos machos do que nas fêmeas. Valores muito pequenos para esta estimativa também ocorreram, sendo que 20% dos ajustamentos apresentaram valores de A abaixo de 300 kg. As estimativas de A , B e K foram todas negativas em três animais; mesmo assim, a soma dos quadrados dos desvios e o coeficiente de determinação indicaram boa aderência da função para estes animais, evidenciando que, às vezes, um bom ajustamento não implica na obtenção de estimativas confiáveis para os parâmetros.

Não se consegue explicar estes valores extremos por meio de um fator isolado. Verificou-se, por exemplo, que, se o intervalo entre as duas últimas pesagens ultrapassava a três meses e o animal apresentava um alto ganho de peso, a estimativa do valor assintótico era forçosamente elevada. O ganho compensatório, assim como a taxa média de ganho diário de 2 kg/dia, evidenciada em alguns animais, parecem ter também influenciado algumas estimativas. Observou-se que as estimativas dos va-

lores assintóticas estão muito relacionadas com o número de pesagens, e, em termos médios, tendem a aumentar com o número de pesagens. No entanto, quando se dispõe de poucas pesagens e o animal apresenta um elevado ganho de peso, o ajustamento não dispõe de pontos que trunquem aquele desenvolvimento, apresentando valores muito altos para \hat{A} , alterando também os valores de \hat{B} e \hat{K} em consequência da correlação entre estas estimativas. O inverso também pode ocorrer, acarretando estimativas muito baixas. Daí a necessidade de se acompanhar o desenvolvimento do animal até 60 meses de idade, sugerida por Brown et al. (1972), para que se obtenham estimativas mais precisas destes parâmetros.

As demais funções não apresentaram estes tipos de problemas. Talvez o formato sigmoidal tenha feito com que as estimativas permanecessem dentro de um intervalo muito mais aceitável biologicamente.

A Tabela 1 mostra as médias das somas dos quadrados dos desvios para os quatro modelos, para machos e fêmeas. O modelo Brody apresentou as menores médias, aproximadamente 20% menores do que as obtidas para o Logístico. Estes resultados concordam com os encontrados por diversos pesquisadores (Duarte 1975, Silveira 1976, Brown et al. 1976). Já Eisen et al. (1969) encontraram menores variâncias residuais para o modelo Logístico, quando comparado com os modelos Bertalanffy e Gompertz, mas os modelos não foram exatamente iguais aos que foram aqui estudados.

Observou-se que, se a média de somas de quadrados dos desvios para dado reprodutor tendesse a ser menor em determinado modelo, o mesmo aconteceria nos outros, sugerindo que, quando determinado modelo apresenta um bom ajuste para o crescimento de um indivíduo, isto certamente ocorrerá com os demais.

As maiores médias das somas de quadrados dos desvios, obtidas nas fêmeas, são reflexo do maior número de pesagem, por animal, neste sexo. Por outro lado, poderiam indicar maior persistência no crescimento, o que poderia ser confirmado pelo ajustamento destas somas de quadrados para o número de pesagens.

As médias dos coeficientes de determinação nos quatro modelos e nos dois sexos (Tabela 2) foram, aproximadamente, iguais a 99%, concordando com os resultados obtidos por Silveira (1976). A aderência do modelo Logístico foi menor que 80% para, aproximadamente, dez indivíduos, que foram eliminados das análises, por se considerar que coeficientes de determinação desta ordem refletiam problemas na série de pontos peso/idade dos animais.

O processo iterativo foi mais lento no modelo Brody, em média, como mostra a Tabela 3. O modelo Gompertz convergiu mais rapidamente nos dois sexos. Embora as fêmeas tivessem maior número de pesagens, o número de iterações foi menor neste sexo, apenas para os modelos Bertalanffy e Brody. De maneira geral, quando o número de iterações, para determinado indivíduo, se distanciou muito da média, as estimativas dos parâmetros do modelo em ajustamento também apresentaram grandes desvios com relação às suas médias. A recíproca não foi verdadeira.

O grau de proximidade dos valores iniciais com as estimativas obtidas parece não influenciar o número de iterações, uma vez que esta aproximação foi maior no modelo Brody, quando comparada com a aproximação dos valores fornecidos para o modelo Gompertz.

Não houve uma relação aparente que mostrasse qualquer dependência do número de iterações com os coeficientes de determinação ou somas de quadrados dos desvios. Tanto um ajusta-

TABELA 1. Médias das somas dos quadrados dos desvios, por modelo, nos dois sexos.

Sexo	Modelos				Número de animais
	Brody	Bertalanffy	Gompertz	Logístico	
Machos	2.823	3.075	3.284	3.532	187
Fêmeas	4.011	4.373	4.610	4.891	244

mento muito bom, em termos de coeficientes de determinação, quanto um mau ajustamento podiam apresentar número alto de iterações.

As Figs. 1 a 4 mostram, graficamente, os ajustamentos dos modelos. Os animais com pesagens nos meses pares foram amostrados para indicar a média observada naquela idade. Portanto, nestes gráficos, as médias observadas de peso constituem uma aproximação, mas os pesos ajustados foram

calculados para todos os animais, constituindo-se de médias gerais.

De maneira geral, em todos os modelos observou-se uma subestimação dos pesos de quatro a dez meses. Excetuando-se o modelo Brody, os demais modelos superestimaram o peso ao nascimento.

Os pontos de inflexão, nas curvas que os apresentam, foram pouco acentuados e ocorreram bem cedo.

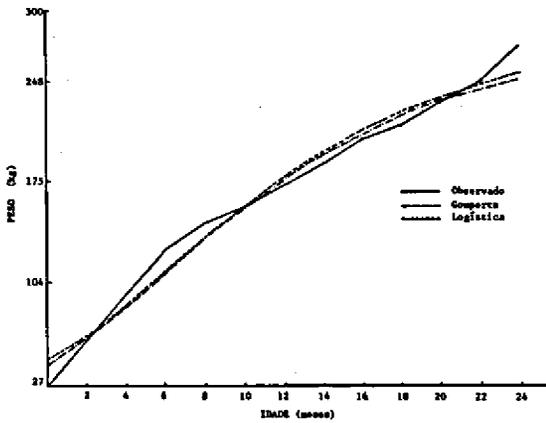


FIG. 1. Representação gráfica das médias dos pesos ajustados pelas funções Gompertz e Logística, nas fêmeas, em contraste com médias de pesos observados.

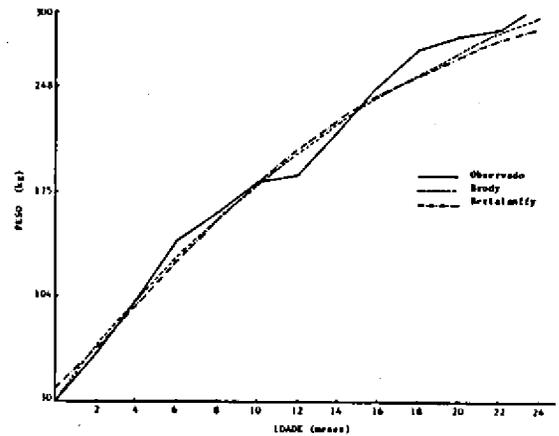


FIG. 2. Representação gráfica das médias dos pesos ajustados pelas funções Brody e Bertalanffy, nas fêmeas, em contraste com médias de pesos observados.

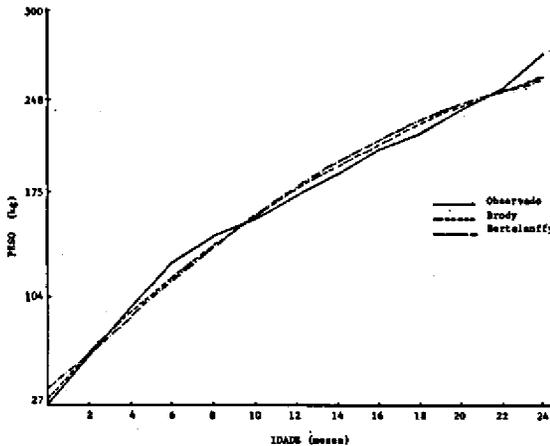


FIG. 3. Representação gráfica das médias dos pesos ajustados pelas funções Brody e Bertalanffy, nos machos, em contraste com médias de pesos observados.

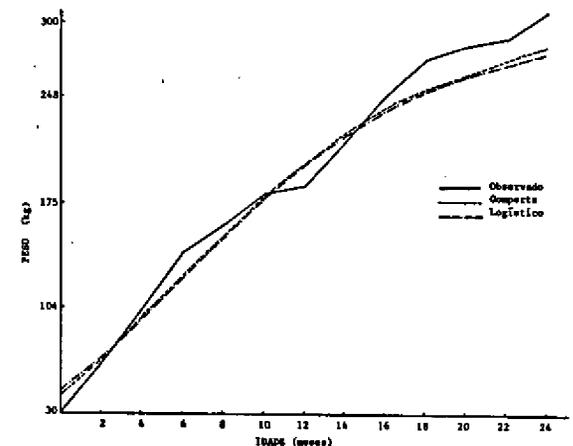


FIG. 4. Representação gráfica das médias dos pesos ajustados pelas funções Gompertz e Logística, nos machos, em contraste com médias de pesos observados.

TABELA 2. Médias dos coeficientes de determinação, por modelo e por sexo, em percentagem.

Sexo	Modelos				Número de animais
	Brody	Bertalanffy	Gompertz	Logístico	
Machos	99,23	99,16	99,11	99,05	187
Fêmeas	99,06	98,99	98,93	98,87	244

TABELA 3. Número médio de iterações por modelo e por sexo.

Sexo	Modelos				Número de animais
	Brody	Bertalanffy	Gompertz	Logístico	
Machos	7,48	6,55	5,54	6,15	187
Fêmeas	7,36	6,25	5,78	6,61	244

CONCLUSÕES

1. Os quatro modelos estudados se ajustaram bem aos dados de peso/idade dos animais, apresentando coeficientes de determinação próximos de 99%, para ambos os sexos.

2. O modelo Brody, que é mais simples e não apresenta o formato sigmóide característico do crescimento como os demais, requereu, em média, para ambos os sexos, o maior número de iterações.

3. O número de pontos observados por animal, bem como a idade ou peso — quando a última pesagem foi feita —, representaram a principal dificuldade neste tipo de trabalho. Além disto, a uniformidade do crescimento pode ser um fator determinante para se obter estimativas de parâmetros mais próximos dos valores esperados para a característica biológica que representam.

4. Já que os parâmetros a serem estimados para os modelos apresentam certo grau de dependência, as estimativas ficarão comprometidas se não forem tomados pesos em todas as fases representativas da vida do animal.

REFERÊNCIAS

- BROWN, J.E.; BROWN, C.J. & BUTTS, W.T. A discussion of the aspects of weight, mature weight and rate of maturing in hereford and angus cattle. *J. Anim. Sci.*, 34 (4): 525-36, 1972.
- DRAPER, N.R. & SMITH, H. *Applied regression analysis*. New York, John Wiley & Sons, 1966. 407 p.
- DUARTE, F.A.M. Estudo da curva de crescimento de animais da raça Nelore, através de cinco modelos estocásticos. Ribeirão Preto, Faculdade de Medicina de Ribeirão Preto, 1975. 284 p.
- EISEN, E.J.; LANG, E.J. & LEGATES, J.E. Comparison of growth functions within and between lines of mice selected for large and small body weight. *Teor. Apl. Genetics*, 39: 251-60, 1969.
- FITZHUGH JUNIOR, H. A. Analysis of growth curves and strategies for altering their shape. *J. Anim. Sci.*, 42 (4): 1096-51, 1976.
- GROSENBAUCH, L.R. Generalization and reparameterization of some sigmoid and other non-linear functions. *Biometrics*, 21 (3): 708-14, 1965.
- LAIRD, A.K. Dynamics of relative growth. *Growth*, 29: 249-63, 1965.
- _____ & HOWARD, A. Growth curves in inbred mice. *Nature*, 213 (5078): 786-8, 1967.
- LUDWIG, A. Ajustamento de curvas exponenciais ao crescimento de gado Nelore e análise de seus parâmetros. Viçosa. UFV, 1977. 84 p. Tese Mestrado.
- NELDER, J.A. The fitting of a generalization of the logistic curve. *Biometrics*, 17 (1): 89-110, 1961.
- RICHARDS, F.J. A flexible growth function for empirical use. *J. Exp. Bot.*, 10(29): 290-300, 1959.
- SILVEIRA, P.J. Estudo de alguns modelos exponenciais no crescimento de bovinos da raça Ibagé. Piracicaba, USP, 1976. 174 p. Tese Mestrado.
- _____ ; FITZHUGH JUNIOR, H. A. & CARTWRIGHT, T.C. A comparison of non-linear models for describing weight-age relationships in cattle. *J. Anim. Sci.*, 42 (4): 410-8, 1976. .



Impresso
Editora Gráfica EIXO Ltda.
Fones: 272-3947 e 273-1153 - Brasília-DF.
