

ESTIMATIVA DOS PARÂMETROS DA DISTRIBUIÇÃO GAMA DE PROBABILIDADES PARA TOTAIS DE PRECIPITAÇÃO EM UMA REGIÃO DE PELotas, RS¹

VERA OSORIO DA FONSECA² e JOÃO ANTÔNIO SILVA DE ALBUQUERQUE³

RESUMO - São estimados parâmetros da distribuição gama de probabilidades, para totais de precipitação de uma, duas e três semanas, para a região representada pelas observações do Posto Agrometeorológico da Unidade de Execução de Pesquisa de Âmbito Estadual (UEPAE) de Cascata, em Pelotas, Rio Grande do Sul.

Termos para indexação: clima, precipitação, chuva, probabilidade.

INTRODUÇÃO

Ao lidar-se com fenômenos atmosféricos, nota-se que a curva de probabilidades "verdadeira" é por suas características, desconhecida, e precisa ser estimada a partir da curva de probabilidades da amostra. Esta estimativa sempre conterá erro, e o problema estará em encontrar-se um método, que reduza este erro de estimativa.

Tanto a teoria como a observação podem sugerir que os dados provém de uma população, a qual pode ser aproximada por uma expressão matemática. Ainda que a correspondência entre a distribuição de probabilidades da medida de fenômenos naturais e um modelo matemático nunca seja perfeita, em muitos casos a aproximação é bastante razoável para aplicações práticas.

BARGER & THOM (1949) sugeriram um modelo matemático para aproximar a distribuição de probabilidades de precipitação. Estes autores encontraram que a função gama incompleta é uma aproximação razoavelmente boa para esta distribuição de probabilidades, independente se totais semanais, mensais ou sazonais são estudados.

Este método foi posteriormente discutido e (ou) aplicado em trabalhos de THOM (1958),

FRIEDMAN & JANES (1957), BARGER et al. (1959).

VIVALDI (1973), estudando a distribuição gama em dados pluviométricos de 33 anos, concluiu, que o ajustamento da distribuição gama é eficiente, independente do tamanho dos períodos estudados, bem como a necessidade de que a obtenção das estimativas dos parâmetros seja feita através do método de máxima verossimilhança.

É com base nestes autores que são estimados os parâmetros da distribuição gama de probabilidades das precipitações, para períodos de uma, duas e três semanas, para a região representada pelas observações do Posto Agrometeorológico da UEPAE de Cascata, em Pelotas, RS.

MATERIAL E MÉTODOS

Admitindo-se como apropriado o modelo proposto por esses autores, a probabilidade de precipitações menores do que x milímetros, durante dado período, em qualquer ano, é expresso por:

$$G(x) = P + (1 - P) F(x), \quad (1)$$

onde P = proporção de zero (ou traço) de precipitação total durante o período; $(1 - P)$ é a proporção de precipitação total excedendo zero (ou traço); $F(x)$ = função cumulativa de probabilidade.

Os totais de precipitação *não nulas*, para cada período, é que são distribuídos, de acordo com a distribuição gama de probabilidades.

A estimação da função cumulativa de probabilidades:

$$F(x) = \int_0^x f(x) dx, \text{ onde } f(x) = \frac{\gamma-1}{x} \frac{e^{-x/\beta}}{\beta \Gamma(\gamma)} dx, \quad (2)$$

requer a estimação dos parâmetros γ e β .

¹ Aceito para publicação em 24 de fevereiro de 1978.

² Economista, M.Sc., Pesquisador da Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária (EMBRAPA), na UEPAE de Cascata, Caixa Postal 403, 96.100 - Pelotas, RS.

³ Eng.º Agr.º, M.Sc., Pesquisador da Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária (EMBRAPA), na UEPAE de Cascata, Caixa Postal 403, 96.100 - Pelotas, RS.

A estimativa de máxima verossimilhança de γ , designado por g é encontrada resolvendo para g a equação quadrática (THOM 1958):

$$12 \left(\ln \bar{x} - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n \ln x \right) g^2 - 6g - 1 = 0, \quad (3)$$

ou usando \log_{10} e o fator de conversão 2,3026:

$$27,6312 \left(\log_{10} \bar{x} - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n \log_{10} x \right) g^2 - 6g - 1 = 0 \quad (4)$$

A estimativa de β é obtida através de b , onde:

$$b = \bar{x} / g, \quad (5)$$

sendo \bar{x} a média de precipitações no período considerado.

Deve-se observar que \bar{x} e $\sum \ln x$ são baseados somente naqueles anos em que as precipitações são maiores que zero (ou traço).

Para este estudo são utilizadas observações de um período de 22 anos (1954 a 1976), não se dispondo de mais informações, como seria o desejável⁴. Os parâmetros são estimados para períodos de uma, duas e três semanas, iniciando para cada semana do ano climatológico aqui considerado.

A divisão do ano é feita em 52 semanas (Tabela 1), sendo a primeira do 1.º a 7 de janeiro e a última de 25 a 31 de dezembro. Nos anos bissextos, o nono período que corresponde a 26/02 a 4/03 fica com oito dias ao invés de sete.

Considera-se como precipitação zero todos os valores inferiores a um milímetro, que tenham ocorrido no período em estudo.

BARGER (mimeografado) construiu gráficos inteiramente baseados nas tabelas de PEARSON (1965), para a probabilidade acumulada da distribuição gama. Nestas tabelas a probabilidade acumulada está tabulada usando os argumentos p e u , obtidos a partir de b e g , pelas seguintes relações:

$$p = g - 1, \quad (6)$$

$$u = \frac{x}{b\sqrt{g}}, \quad (7) \quad (b\sqrt{g} = \text{desvio padrão})$$

⁴ Como a variância das estimativas é inversamente proporcional ao tamanho da amostra, quanto maior é n , menor será o intervalo de confiança aproximado. Para FRIEDMAN & JANES (1957) citado por VIVALDI (1973) o tamanho da amostra deve ser maior que 30, mas não fazem pesquisa especial sobre o assunto.

TABELA 1. Ano Climatológico

Número da Semana	Data de Início	Data de Término
1	01/01	7/01
2	8/01	14/01
3	15/01	21/01
4	22/01	28/01
5	29/01	4/02
6	5/02	11/02
7	12/02	18/02
8	19/02	25/02
9	26/02	4/03
10	5/03	11/03
11	12/03	18/03
12	19/03	25/03
13	26/03	01/04
14	2/04	8/04
15	9/04	15/04
16	16/04	22/04
17	23/04	29/04
18	30/04	6/05
19	7/05	13/05
20	14/05	20/05
21	21/05	27/05
22	28/05	3/06
23	4/06	10/06
24	11/06	17/06
25	18/06	24/06
26	25/06	01/07
27	2/07	8/07
28	9/07	15/07
29	16/07	22/07
30	23/07	29/07
31	30/07	5/08
32	6/08	12/08
33	13/08	19/08
34	20/08	26/08
35	27/08	2/09
36	3/09	9/09
37	10/09	16/09
38	17/09	23/09
39	24/09	30/09
40	01/10	7/10
41	8/10	14/10
42	15/10	21/10
43	22/10	28/10
44	29/10	4/11
45	5/11	11/11
46	12/11	18/11
47	19/11	25/11
48	26/11	2/12
49	3/12	9/12
50	10/12	16/12
51	17/12	23/12
52	24/12	31/12

onde x é a medida de precipitação.

As figuras de BARGER possibilitam a obtenção de probabilidades aproximadas, diretamente a partir da estimativa dos parâmetros, sem a conversão nas equações (6) e (7), e a dupla interpolação requerida pelas tabelas de PEARSON.

Com o mesmo objetivo estão aqui incluídas figuras, para diferentes valores de g , \bar{x} e x , utilizando-se milímetros como medida de precipitação.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Nas Tabelas 2, 3 e 4 constam os valores de g e b estimados para os parâmetros γ e β , respectivamente, correspondentes aos períodos estudados (uma, duas e três semanas, respectivamente), bem como a estimativa da média da distribuição gama (\bar{x}), da média sobre todos os anos (MG), e da frequência relativa de anos com precipitação zero (ou traço) (P).

Com estas informações é possível estimar-se tanto a probabilidade de determinado total de precipitação, como o total de precipitação correspondente a um nível estipulado de probabilidade.

As estimativas para os parâmetros de uma semana são menos seguras do que para duas e três semanas. Trabalhos de outros autores mostraram um viés na observação de pequenos totais de precipitação.

Para utilizar as figuras entra-se com x e \bar{x} para níveis específicos de g (Figuras 1 a 15). Para valores de g intermediários, faz-se a interpolação de valores.

Com algum cuidado e experiência são obtidas as probabilidades de menos do que x milímetros de precipitação, dentro dos limites de 0,01 e 0,05 a maior parte das vezes, decrescendo a precisão nos intervalos de probabilidade baixa.

Os valores contidos nas figuras referem-se aos anos com precipitações *não nulas*. Ignoram o fato de que em alguns anos de dado período possam não ter ocorrido precipitações. Nestes casos é necessário que se faça a seguinte correção, para ter-se a probabilidade desejada (THOM 1951):

$$P_c = P + (1 - P) Z, \quad (8)$$

onde P_c = probabilidade corrigida; P = proporção de anos com precipitação zero (ou traço); e Z = probabilidade encontrada no gráfico.

TABELA 2. Parâmetros da distribuição de probabilidades da precipitação (em mm), para período de uma semana

N.º da Semana	% Zero ou Traço	MDG*	MG**	b***	g****
1	9,0	42,8	38,9	24,88	1,72
2	18,2	36,0	29,4	24,83	1,45
3	13,6	33,5	28,9	17,00	1,97
4	13,6	43,4	37,5	49,32	0,88
5	13,6	31,4	27,1	33,40	0,94
6	13,6	54,7	47,2	43,76	1,25
7	13,6	41,6	35,9	36,81	1,13
8	13,6	27,2	23,5	29,89	0,91
9	13,6	36,6	31,7	47,53	0,77
10	4,5	34,8	33,2	41,43	0,84
11	4,5	31,4	30,0	19,50	1,61
12	13,6	40,3	34,8	42,87	0,94
13	4,5	33,3	31,8	37,42	0,89
14	13,6	32,0	27,6	31,68	1,01
15	13,6	33,6	29,0	60,00	0,56
16	22,7	14,7	11,3	10,14	1,45
17	27,3	20,6	15,0	20,60	1,00
18	22,7	28,4	21,9	25,82	1,10
19	22,7	21,4	16,5	24,88	0,86
20	18,2	23,3	19,0	10,99	2,12
21	50,0	48,7	24,3	51,81	0,94
22	22,7	35,2	27,2	32,00	1,10
23	4,5	39,6	37,8	43,52	0,91
24	36,4	36,0	22,9	23,53	1,53
25	27,3	29,1	21,1	38,80	0,75
26	4,5	43,5	41,5	44,39	0,98
27	9,0	29,4	26,7	28,54	1,03
28	22,7	39,7	30,7	47,83	0,83
29	18,2	63,5	52,0	72,16	0,88
30	13,6	24,9	21,5	23,49	1,06
31	9,0	56,0	50,9	51,85	1,08
32	13,6	31,2	26,9	21,52	1,45
33	18,2	34,5	28,3	10,99	3,14
34	4,5	37,1	35,4	34,67	1,07
35	13,6	41,4	35,8	36,32	1,14
36	18,2	55,8	45,7	49,82	1,12
37	9,0	43,5	39,5	32,95	1,32
38	4,5	38,8	37,0	13,91	2,79
39	22,7	45,8	35,4	34,96	1,31
40	18,2	36,1	29,5	42,98	0,84
41	13,6	34,8	30,0	38,67	0,90
42	9,0	31,9	29,0	30,38	1,05
43	4,5	38,9	37,1	27,99	1,39
44	9,0	32,5	29,5	33,85	0,96
45	18,2	40,8	33,4	48,80	1,00
46	40,9	32,3	19,1	36,70	0,88
47	27,3	25,9	18,9	30,83	0,84
48	13,6	33,1	28,6	26,69	1,24
49	22,7	35,3	27,3	37,96	0,93
50	13,6	30,5	26,3	15,80	1,93
51	13,6	34,0	29,4	33,66	1,01
52	13,6	25,8	22,3	27,45	0,94

* Média da distribuição gama (\bar{x})

** Média Geral (inclui todos os anos)

*** estimativa de β

**** estimativa de γ

TABELA 3. Parâmetros da distribuição de probabilidades da precipitação (em mm), para período de duas semanas, começando na semana indicada.

N.º da Semana	% Zero ou Traço	MDG*	MG**	b***	g****
1	0	68,39	68,39	17,36	1,67
2	4,5	61,11	58,36	24,25	2,52
3	4,5	69,42	66,26	41,32	1,68
4	0	64,44	64,44	37,47	1,72
5	0	74,31	74,31	66,95	1,11
6	0	83,17	83,17	46,21	1,80
7	0	59,42	59,42	35,58	1,67
8	0	55,13	55,13	55,13	1,00
9	0	64,43	64,43	67,82	0,95
10	0	62,30	62,30	26,62	2,34
11	0	64,86	64,86	37,49	1,73
12	0	66,64	66,64	53,31	1,25
13	0	59,43	59,43	44,02	1,35
14	4,5	59,61	56,94	62,74	0,95
15	0	40,41	40,41	44,90	0,90
16	4,5	27,60	26,35	17,92	1,54
17	9,0	40,57	36,89	35,28	1,15
18	9,0	42,35	38,53	35,59	1,19
19	4,5	37,35	35,65	27,26	1,37
20	4,5	45,50	43,44	39,91	1,14
21	9,0	56,76	51,61	63,07	0,90
22	0	65,04	65,04	46,13	1,41
23	0	60,78	60,78	49,41	1,23
24	9,0	48,47	44,12	51,56	0,94
25	0	62,69	62,69	52,24	1,20
26	0	68,25	68,25	40,38	1,69
27	4,5	60,21	57,48	36,94	1,63
28	4,5	86,70	82,76	68,81	1,26
29	0	73,53	73,53	62,31	1,18
30	0	72,45	72,45	56,16	1,29
31	0	77,86	77,86	45,27	1,72
32	4,5	57,87	55,29	29,98	1,93
33	4,5	66,77	63,73	26,60	2,51
34	0	71,18	71,18	53,52	1,33
35	4,5	85,41	81,54	32,11	2,66
36	0	85,25	85,25	56,46	1,51
37	0	77,02	77,02	31,83	2,42
38	0	77,39	77,39	25,46	3,04
39	4,5	67,97	64,88	32,52	2,09
40	0	59,93	59,93	52,11	1,15
41	4,5	61,85	59,08	37,94	1,63
42	0	66,14	66,14	35,18	1,88
43	0	66,65	66,65	37,87	1,76
44	0	62,87	62,87	57,68	1,09
45	9,0	57,70	52,45	51,98	1,11
46	9,0	41,74	37,98	48,53	0,86
47	4,5	49,74	47,48	47,83	1,04
48	4,5	58,87	56,21	43,93	1,34
49	0	53,71	53,71	35,57	1,51
50	4,5	58,57	55,93	37,54	1,56
51	0	51,70	51,70	49,71	1,04
52	0	58,63	58,63	11,17	5,25

* Média da distribuição gama (\bar{x})
 ** Média Geral (inclui todos os anos)
 *** estimativa de β
 **** estimativa de γ

TABELA 4. Parâmetros da distribuição de probabilidades da precipitação (em mm), para período de três semanas, começando na semana indicada.

N.º da Semana	% Zero ou Traço	MDG*	MG**	b***	g****
1	0	106,06	106,06	62,76	1,69
2	0	95,73	95,73	41,26	2,32
3	0	93,34	93,34	34,57	2,70
4	0	111,67	111,67	39,74	2,81
5	0	110,25	110,25	41,14	2,68
6	0	106,20	106,20	54,74	1,94
7	0	91,08	91,08	51,17	1,78
8	0	88,36	88,36	74,88	1,18
9	0	94,43	94,43	34,09	2,77
10	0	98,09	98,09	41,92	2,34
11	0	96,65	96,65	35,27	2,74
12	0	94,28	94,28	49,88	1,89
13	0	88,45	88,45	74,33	1,19
14	0	68,05	68,05	55,33	1,23
15	0	54,90	54,90	42,89	1,28
16	4,5	50,57	48,28	27,79	1,82
17	4,5	56,01	53,49	38,10	1,47
18	0	57,57	57,57	34,47	1,67
19	0	60,04	60,04	48,81	1,23
20	0	70,66	70,66	50,11	1,41
21	0	89,43	89,43	51,99	1,72
22	0	88,01	88,01	47,32	1,86
23	0	81,94	81,94	48,11	1,41
24	0	85,65	86,65	59,48	1,44
25	0	89,41	89,41	46,57	1,92
26	0	99,01	99,01	56,90	1,74
27	4,5	114,70	112,89	61,01	1,88
28	0	104,29	104,29	68,92	1,77
29	0	124,00	124,00	70,06	1,77
30	0	99,38	99,38	48,96	2,06
31	0	106,21	106,21	38,76	2,74
32	0	91,11	91,11	50,06	1,82
33	0	99,97	99,97	51,27	1,95
34	0	116,92	116,92	90,64	1,29
35	0	120,61	120,61	73,10	1,65
36	0	122,77	122,77	44,48	2,76
37	0	113,29	113,29	24,42	4,64
38	0	102,37	102,37	19,50	5,25
39	0	99,48	99,48	58,18	1,71
40	0	88,60	88,60	34,34	2,58
41	0	96,20	96,20	34,60	2,78
42	0	95,67	95,67	32,76	2,92
43	0	100,00	100,00	53,48	1,87
44	0	82,44	82,44	74,27	1,11
45	0	71,31	71,31	71,31	1,00
46	4,5	74,48	71,10	53,58	1,39
47	4,5	78,36	74,81	66,78	1,38
48	0	82,31	82,31	40,15	2,05
49	0	83,13	83,13	37,79	2,20
50	0	78,06	78,06	46,74	1,67
51	0	88,61	88,61	18,69	4,74
52	0	93,90	93,90	26,01	3,61

* Média da distribuição gama (\bar{x})
 ** Média Geral (inclui todos os anos)
 *** estimativa de β
 **** estimativa de γ

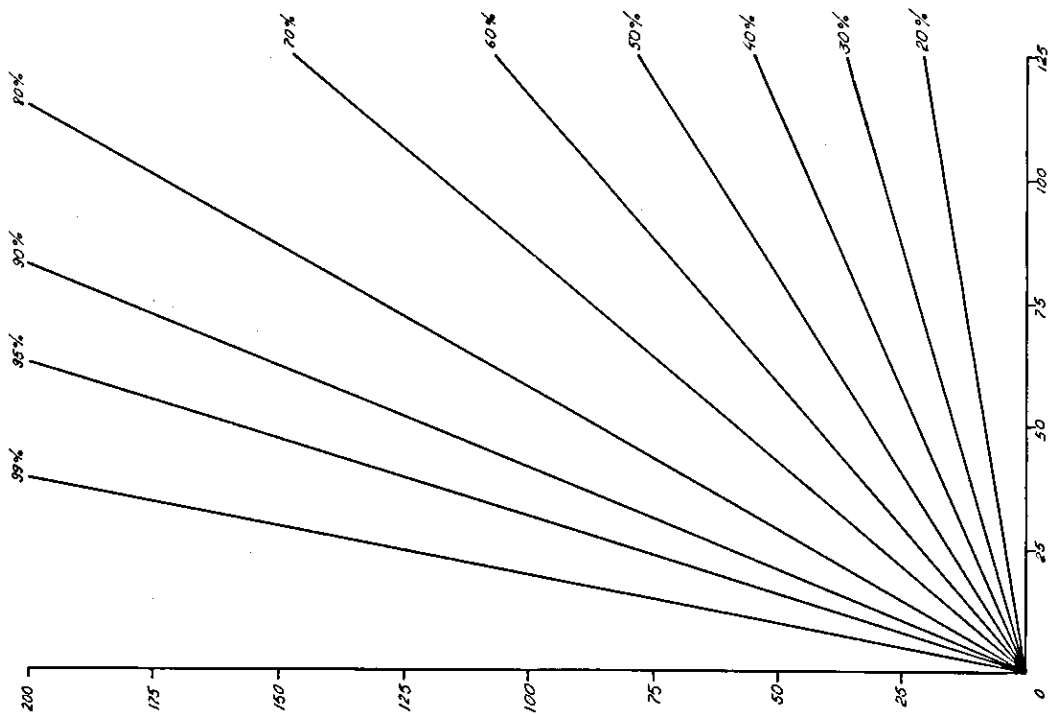


FIG. 2. Probabilidade de menos do que x milímetros de precipitação, para $g = 1,0$.

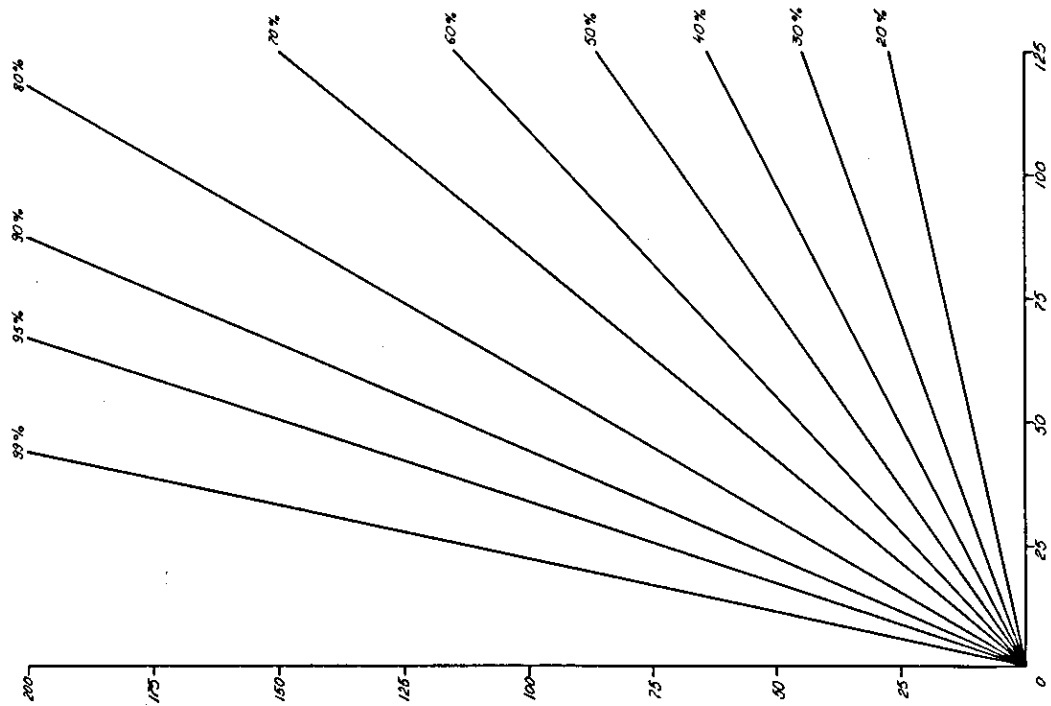


FIG. 1. Probabilidade de menos do que x milímetros de precipitação, para $g = 0,8$.

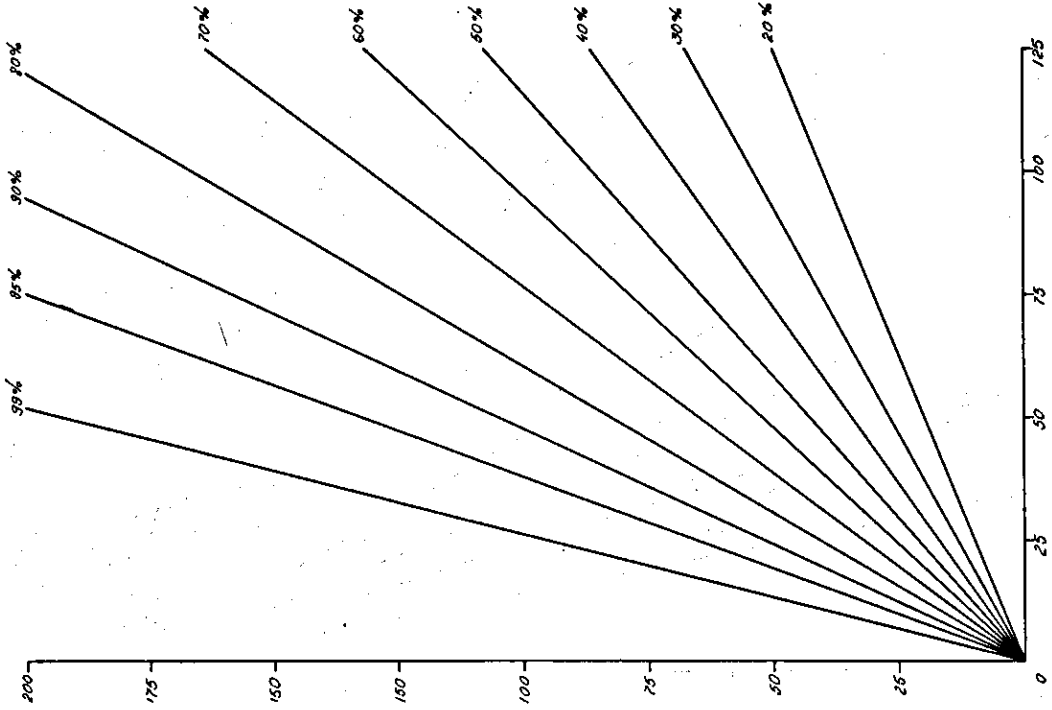


FIG. 4. Probabilidade de menos do que x milímetros de precipitação, para $g = 1,4$.

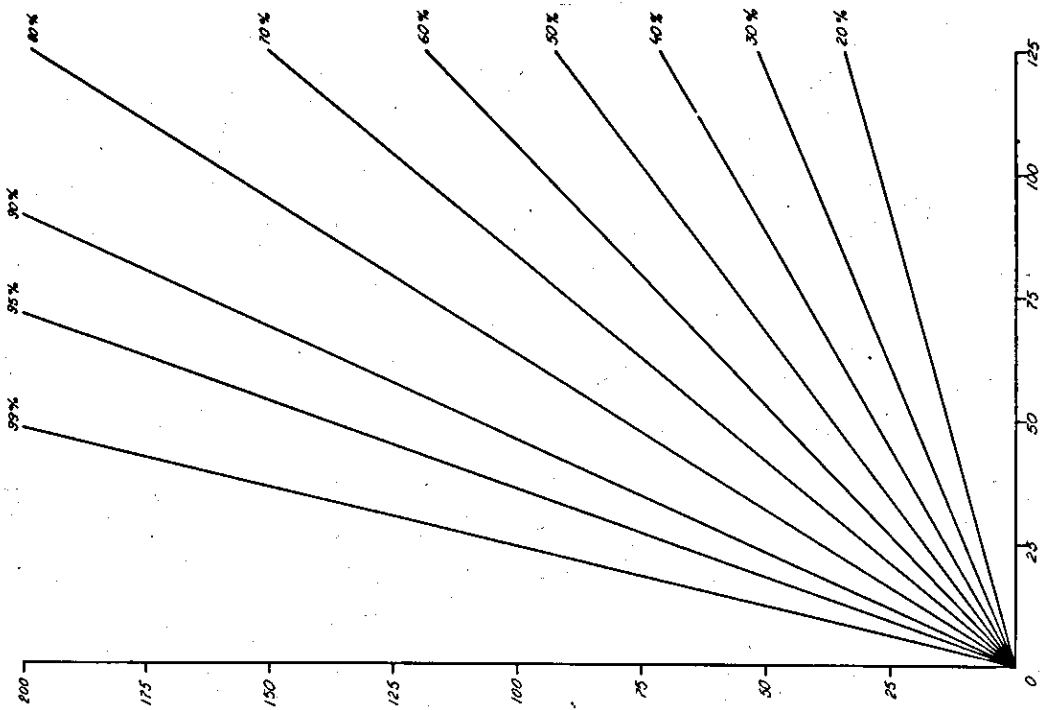


FIG. 3. Probabilidade de menos do que x milímetros de precipitação, para $g = 1,2$.

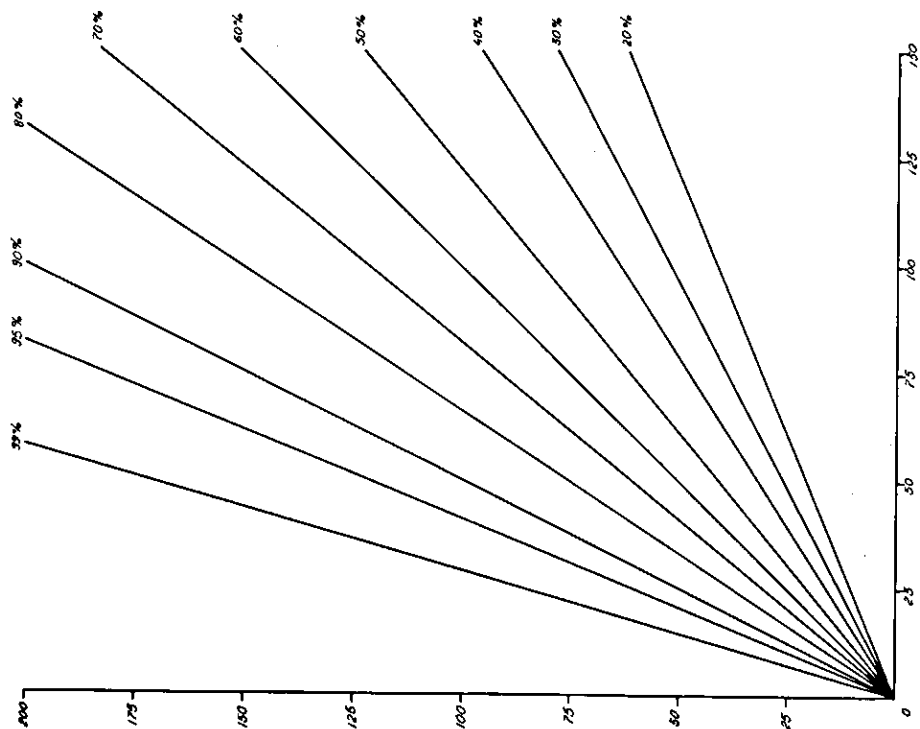


FIG. 6. Probabilidade de menos do que x milímetros de precipitação, para $g = 1,8$.

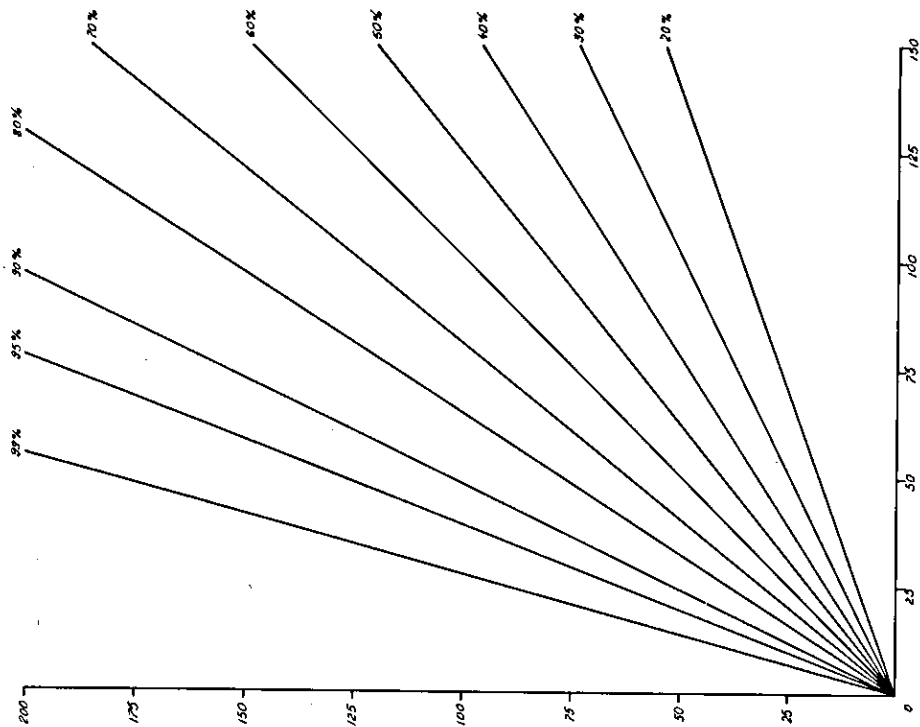


FIG. 5. Probabilidade de menos do que x milímetros de precipitação, para $g = 1,6$.

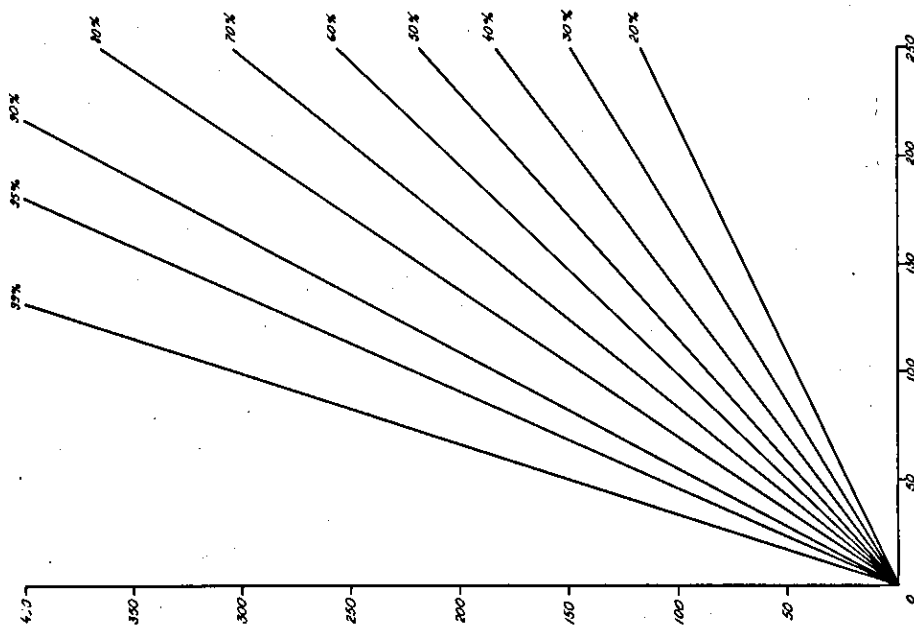


FIG. 8. Probabilidade de menos do que x milímetros de precipitação, para $g = 2,5$.

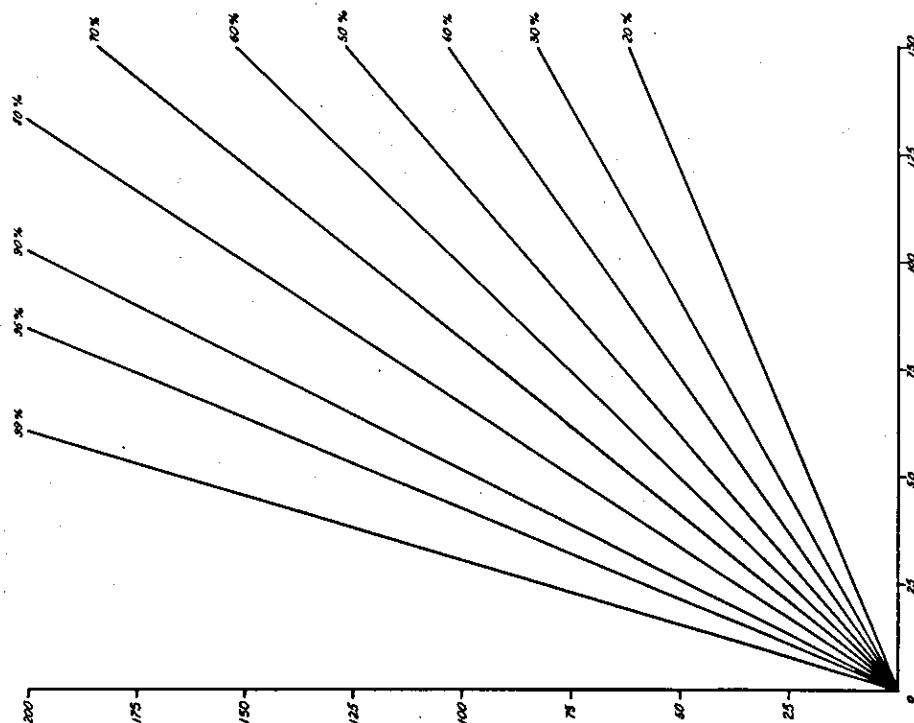


FIG. 7. Probabilidade de menos do que x milímetros de precipitação, para $g = 2,0$.

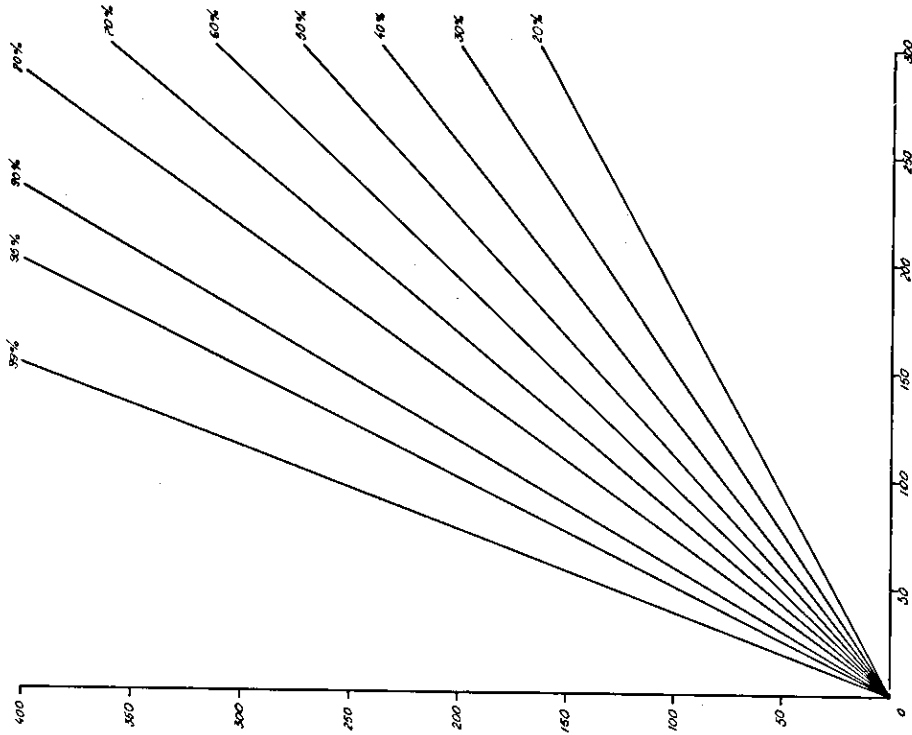


FIG.10. Probabilidade de menos do que x milímetros de precipitação, para $g = 3,5$.

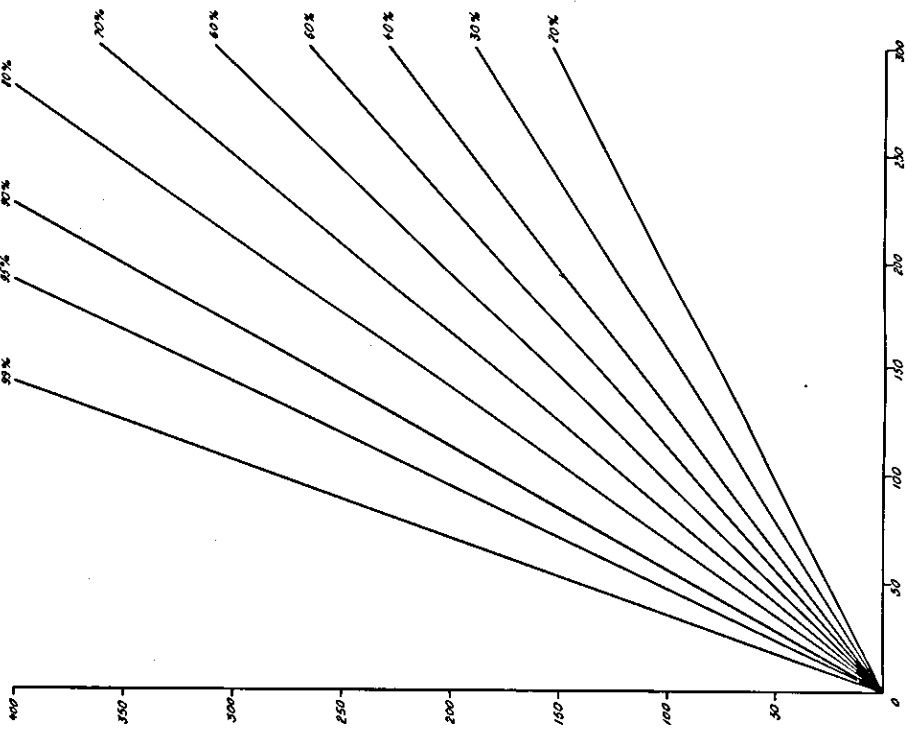


FIG. 9. Probabilidade de menos do que x milímetros de precipitação, para $g = 3,0$.

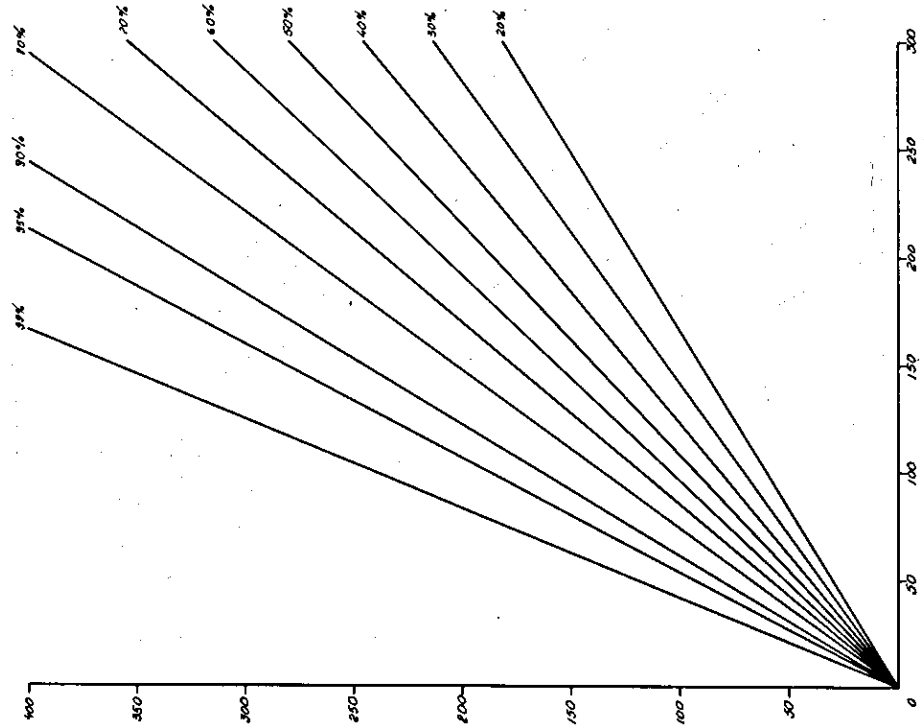


FIG.12. Probabilidade de menos do que x milímetros de precipitação, para $g = 4,5$.

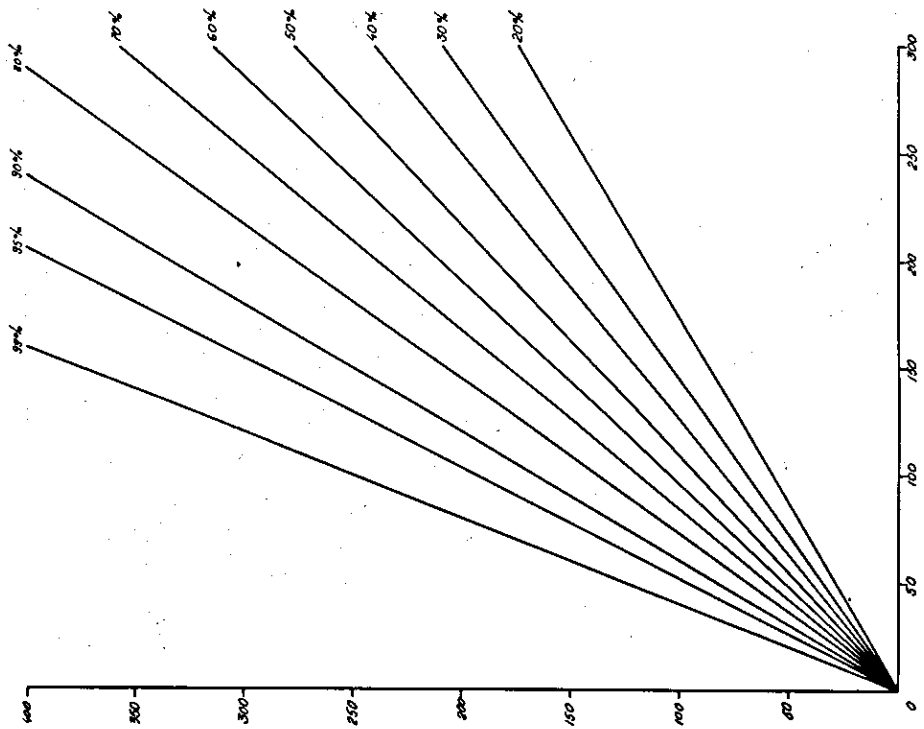


FIG.11. Probabilidade de menos do que x milímetros de precipitação, para $g = 4,0$.

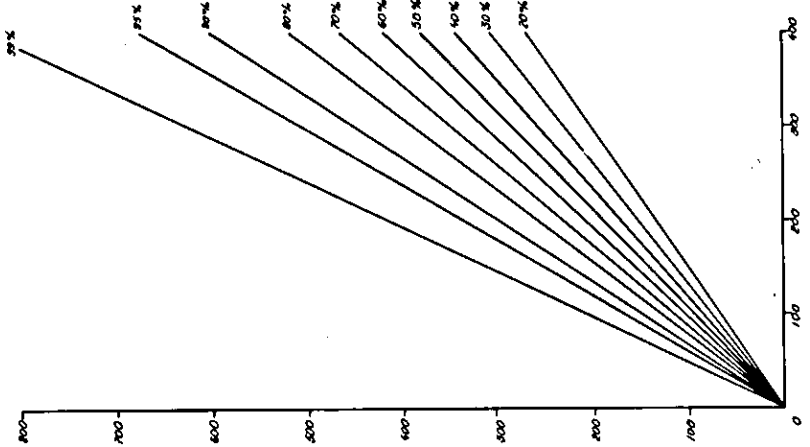


FIG. 15. Probabilidade de menos do que x milímetros de precipitação, para $g = 7,0$.

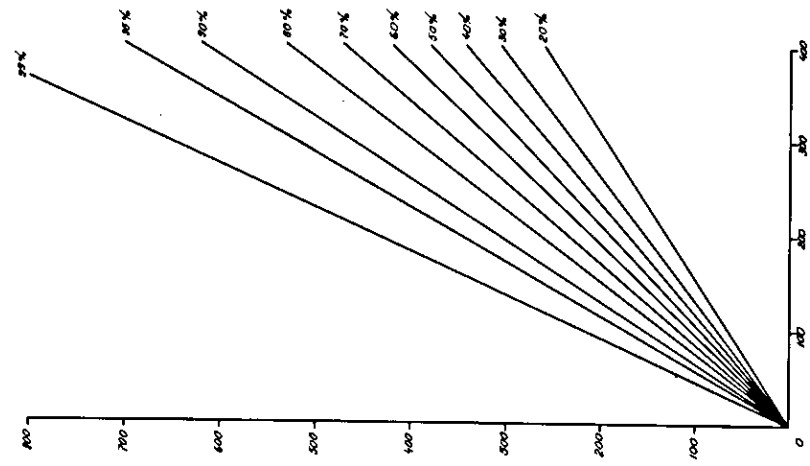


FIG. 14. Probabilidade de menos do que x milímetros de precipitação, para $g = 6,0$.

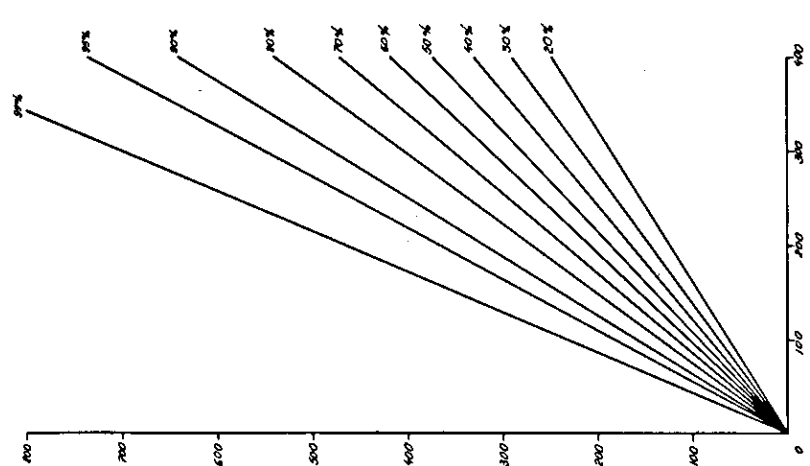


FIG. 13. Probabilidade de menos do que x milímetros de precipitação, para $g = 5,0$.

REFERÊNCIAS

- BARGER, G.L. Gamma distribution parameters from 2 - and 3 - week precipitation totals in the North Central Region of the United States. Ames, Iowa State University, s.d. Mimeografado.
- _____. SHAW, R.G. & DALE, R.F. Changes of receiving selected amounts of precipitation in the North Central Region of the United States. Ames, Iowa State University, 1959. Mimeografado.
- _____. & THOM, H.C.S. Evaluation of drought hazard. *Agronomy Journal*, 41:519-27, 1949.
- FRIEDMAN, D.G. & JANES, B.E. Estimation of rainfall probabilities. Connecticut, Storrs Agr. Exp. Sta., 1957. (Bulletin, 332).
- PEARSON, K. Tables of the incomplete gamma function. Cambridge, 1965.
- THOM, H.C.S. A frequency distribution for precipitation. *Bulletin of the American Meteorological Society*, 32(10):397, 1951.
- _____. A note on the gamma distribution. *Monthly Weather Review*, 68:22, 1958.
- VIVALDI, J.L. Utilização da distribuição gama em dados pluviométricos. Piracicaba, Escola Superior Luiz de Queiroz, 1973. 77 p. Tese Mestrado.

ABSTRACT - GAMMA DISTRIBUTION PARAMETERS ESTIMATION FROM ONE, TWO AND THREE WEEKS PRECIPITATION TOTALS IN A REGION OF PELOTAS, RS

The gamma distribution parameters are estimated for precipitation totals of one, two and three weeks, for the region represented by records of the Agroclimatological Post in the Unidade de Execução de Pesquisa de Âmbito Estadual (UEPAE), de Cascata, in Pelotas, Rio Grande do Sul State.

Index terms: climate, rainfall, probability.