

## INDICE DE EFICIÊNCIA EM FRONTEIRAS DEA NEBULOSAS

### **João Carlos Correia Baptista Soares de Mello**

Depto. de Engenharia de Produção – Universidade Federal Fluminense  
Rua Passo da Pátria, 156, São Domingos, 24240-240, Niterói, RJ  
jcsmello@producao.uff.br

### **Eliane Gonçalves Gomes**

Embrapa Monitoramento por Satélite  
Av. Dr. Júlio Soares de Arruda, 803, Parque São Quirino, 13088-300, Campinas, SP  
eliane@cnpem.embrapa.br

### **Lidia Angulo Meza**

Instituto de Ciência e Tecnologia – Universidade Veiga de Almeida  
Rua Ibituruna, 108, 4º andar, Maracanã, 20271-020, Rio de Janeiro, RJ  
lidia\_a\_meza@yahoo.com

### **Luiz Biondi Neto**

Depto. de Engenharia Eletrônica e Telecomunicações – Universidade do Estado do Rio de Janeiro  
Rua São Francisco Xavier, 524, Bl. A, Sala 5036, Maracanã, 20550-900, Rio de Janeiro, RJ  
lbiondi@uerj.br

### **Resumo**

A fronteira DEA nebulosa surge em situações nas quais uma das variáveis (*input* ou *output*) apresenta um certo grau de incerteza na medição, sem que se assumam que os valores obedecem a alguma distribuição de probabilidade. A fronteira eficiente é construída considerando-se os limites de incerteza, isto é, os menores e maiores valores possíveis de serem assumidos pela variável afetada pela incerteza de medição. Dessa forma, constrói-se uma região em relação à qual as DMUs possuem um certo grau de pertinência. Para calcular o grau de pertinência são construídas fronteiras otimistas e pessimistas. Como o grau de pertinência não é uma medida de eficiência, é introduzido o conceito de fronteira invertida que permite calcular um índice de eficiência difuso. Os desenvolvimentos propostos são aplicados ao caso da avaliação de eficiência das opções de ligação aérea Rio-São Paulo.

**Palavras-chave:** DEA – Conjuntos nebulosos – Índice de eficiência nebulosa.

### **Abstract**

The “fuzzy” DEA frontier is applied in situations where one of the variables (input or output) presents a certain degree of uncertainty in its measurement, without any assumption about the probability distribution function. We build the efficient frontier taking in account the minor and major values of the input (or output). The efficient frontier is, in that case, a fuzzy set, to which the DMUs have a degree of membership. In order to compute the degree of membership two frontiers are constructed: the optimistic and the pessimistic frontiers. As this indicator isn't a efficiency score, we introduce the inverted frontier concept, which allows the fuzzy-DEA efficiency score computation. This approach is used to evaluate the efficiency of the air transport alternatives between the cities of Rio de Janeiro and São Paulo.

**Keywords:** DEA – Fuzzy sets – Fuzzy DEA efficiency score.

## 1. INTRODUÇÃO

Os modelos de Análise Envolvente de Dados (*Data Envelopment Analysis* – DEA) clássicos (Cooper et al., 2000) estimam uma fronteira não paramétrica linear por partes, constituída pelas unidades eficientes. Supõem ainda que existe certeza na determinação das medidas usadas. No entanto, isso pode não ocorrer, seja por efetiva incerteza nas medidas, seja porque os dados são considerados intervalares (Cooper et al., 2000). No primeiro caso, a solução clássica é usar a Análise de Fronteira Estocástica (*Stochastic Frontier Analysis*) (Coelli et al., 1998), que supõe que as incertezas seguem alguma distribuição de probabilidade. Essa abordagem, cuja introdução pode-se vista em Lovell (1993), utiliza métodos econométricos e paramétricos. Na prática, entretanto, essa distribuição de probabilidade pode não ser conhecida. Sant’Anna (2002) propõe um modelo de cálculo probabilístico de eficiências, sem levar em conta a distribuição de probabilidade, mas que não gera um índice único de eficiência.

A proposta deste artigo, que estende os resultados de Soares de Mello et al. (2002) (27), é construir um índice único de eficiência, considerando que uma das variáveis (*input* ou *output*) apresenta incerteza. Para tal, a fronteira eficiente é assumida como sendo um conjunto nebuloso (Zadeh, 1965) em relação ao qual as unidades em avaliação (*Decision Making Units* – DMUs) apresentam um certo grau de pertinência. Os limites inferior e superior desse conjunto nebuloso são denominados fronteira pessimista e fronteira otimista quando a variável com incerteza é um *output*, e inversamente quando a variável de incerteza é o *input*.

Invertendo-se os *outputs* e os *inputs*, obtém-se uma fronteira invertida (Novaes, 2002) em relação à qual as DMUs também possuem um grau de pertinência. É então possível, usando os dois graus de pertinência, definir um índice de eficiência, que será denominado *eficiência nebulosa* ou *eficiência Fuzzy-DEA*.

Na literatura são encontradas algumas alternativas para a incorporação de incertezas aos modelos DEA. Nessas proposições, os PPLs e/ou as medidas de eficiência assumem funções da lógica nebulosa. Na abordagem apresentada neste artigo é utilizada somente a filosofia da lógica difusa sem, no entanto, utilizar suas funções características. Esse fato confere caráter inovador à abordagem aqui proposta.

## 2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA EM MODELOS DEA DIFUSOS

Uma revisão bibliográfica sobre os distintos enfoques utilizados para lidar com dados imprecisos pode ser encontrada em Zhu (2003). O autor divide a imprecisão em três tipos: dados com limites superior e inferior, dados ordinais e razões de dados com limites superior e inferior. O modelo utilizado para esse caso é o IDEA (*Imprecise Data Envelopment Analysis*) (Cooper et al., 1999), sendo este um problema de programação não linear, que com pequenas variações lida com os três tipos de dados imprecisos, utilizando transformações de escala. Por existirem problemas associados à transformação de escala, o autor propõe um enfoque simplificado convertendo as variáveis utilizadas em dados exatos. Os resultados mostram que os índices de eficiência assim obtidos são calculados mais facilmente.

Lertworasirikul et al. (2003) tratam *inputs* e *outputs* imprecisos como conjuntos nebulosos. Esses modelos são formalizados através de programação linear fuzzy. Como enfoque alternativo, os autores propõem a utilização de “modelos DEA de possibilidades” (*possibility DEA models*) que incorporam medidas de possibilidade para os eventos nebulosos na forma de restrições nebulosas. Uma variável difusa é associada a uma distribuição de possibilidades (Zadeh, 1978). Nesse enfoque, escores fuzzy-DEA são únicos, mas dependentes do nível de possibilidade utilizado, isto é, para vários níveis de possibilidade utilizados há diversos escores diferentes correspondentes.

O modelo IDEA (*Imprecise Data Envelopment Analysis*) é usado por Despotis e Smirlis (2002) para lidar com dados imprecisos de dois tipos: dados com limites superior e inferior (dados por intervalos ou *interval data*) e dados ordinais. A utilização desse modelo não linear é feita através de uma mudança de escala das variáveis, que transforma o modelo não linear em um modelo de programação linear. Como resultado obtém-se um limite superior e inferior para a eficiência de uma determinada DMU, o que segundo os autores permite uma melhor

### 3. CRIAÇÃO DA FRONTEIRA DEA NEBULOSA

A abordagem aqui proposta destaca-se das anteriores por não fazer nenhuma suposição em relação à forma como cada *input* ou cada *output* varia. Qualquer que seja a variação, são levados em conta apenas os valores máximos e mínimos possíveis de serem assumidos, utilizando-se em seguida programação linear clássica e modelos DEA tradicionais para a determinação das fronteiras.

Supondo-se um modelo DEA em que não haja certeza nos valores assumidos por um *output*; não haverá igualmente certeza sobre a exata localização da fronteira eficiente. Caso os valores do *output* para algumas DMUs sejam maiores que o suposto, a fronteira estará deslocada “mais acima”, isto é, numa região de valores superiores para esse *output*. Caso os valores sejam inferiores ao suposto, a fronteira estará “mais abaixo”.

Pode-se, assim, pensar em uma situação equivalente às órbitas de elétrons em um átomo (modelo atômico de Rutherford-Bohr), na qual não existe uma fronteira perfeitamente definida. Existe sim uma região do espaço onde pode estar localizada a fronteira. Mantendo-se a analogia com os elétrons, que se localizam na chamada nuvem eletrônica, pode-se dizer que existe uma fronteira nebulosa. Ou seja, a fronteira não é um conjunto no sentido clássico do termo, mas um conjunto nebuloso (Zadeh, 1965). Para esse conjunto não tem sentido dizer que um elemento pertence ou não ao conjunto; deve-se fazer referência ao grau de pertinência desse elemento ao conjunto. Dessa forma, em vez de existirem DMUs na fronteira e outras fora da fronteira, haverá DMUs com diferentes graus de pertinência à fronteira.

Em lógica nebulosa clássica são postuladas certas funções, denominadas funções de pertinência, que determinam o grau de pertinência de uma certa variável a um determinado conjunto. No caso da fronteira nebulosa, o grau de pertinência será calculado com base em propriedades geométricas das fronteiras geradas. Para tal, torna-se necessário definir previamente alguns termos. A fronteira localizada “mais acima” é, na verdade, aquela fronteira obtida por um modelo DEA clássico (CCR ou BCC) que leva em conta o máximo valor do *output* incerto que cada DMU pode atingir. Como, em termos de produção, essa é a melhor situação para todas as DMUs, a fronteira assim obtida denominar-se-á *Fronteira Otimista*. Analogamente, a fronteira obtida com o modelo DEA clássico que considere o menor valor de *output* para cada DMU é a *Fronteira Pessimista*, já que considera a situação menos favorável de produção. As denominações pessimista e otimista, num contexto de multicritério, foram introduzidas por Petrovic & Petrovic (2002) e usadas por Sant’Anna (2003).

A Figura 1 ilustra esses conceitos, considerando que o modelo DEA é o modelo com retornos variáveis de escala, ou seja, o modelo BCC (Banker et al., 1984). A fronteira nebulosa é toda a região situada entre as fronteiras pessimista (fronteira inferior) e otimista (fronteira superior). Note-se ainda que uma DMU não é mais representada por um ponto; a incerteza na medição do *output* faz com que a representação da DMU seja um segmento de reta com extremidades determinadas pelos valores pessimista e otimista desse *output*.



$$Ef_{neb} = \frac{(\varphi_o - \varphi_i + 1)}{2}$$

(VII)

A Figura 4 ilustra os conceitos de fronteira invertida nebulosa para o caso de um *input* e um *output*. Para esse exemplo, os graus de pertinência e a eficiência nebulosa são mostrados na Tabela 3 (dados originais de *input* e *output* na Tabela 1).

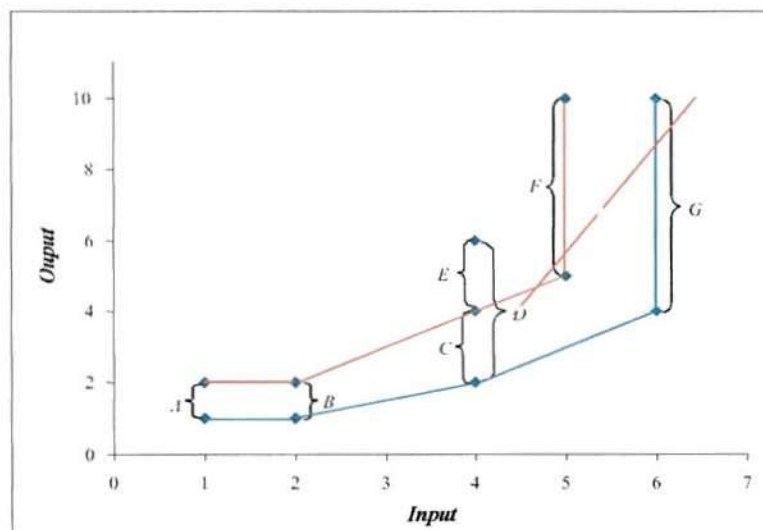


Figura 4: Fronteira nebulosa invertida no modelo BCC.

Tabela 3: Graus de pertinência e eficiência nebulosa para as DMUs da Figura 4.

DMU	$\varphi_o$	$\varphi_i$	$Ef_{neb}$
A	1,00	1,00	0,50
B	0,00	1,00	0,00
C	0,00	1,00	0,00
D	0,25	0,50	0,37
E	0,50	0,00	0,75
F	1,00	0,20	0,90
G	0,83	1,00	0,42

## 7. ESTUDO DE CASO: EFICIÊNCIA DAS OPÇÕES DA PONTE AÉREA RIO – SÃO PAULO

Para ilustrar os conceitos mostrados anteriormente, apresenta-se um estudo de caso da análise de eficiência das opções da ponte aérea Rio–São Paulo sob o ponto de vista do usuário. Para isto, considera-se que o usuário pretende obter o máximo de benefícios pelo preço pago pela passagem. Considera-se como *input* o preço da passagem e como *outputs* alguns dos benefícios oferecidos pela empresa, a saber, frequência de vôos, programa de milhagem e rota utilizada, em uma abordagem semelhante a de Soares de Mello et al. (2002) (26). As unidades de avaliação (DMUs) são as companhias aéreas nas suas diferentes rotas, sendo que uma mesma companhia em uma rota diferente é considerada como uma DMU diferente.

A avaliação da rota é subjetiva e foi feita através da abordagem MACBETH (Bana e Costa & Vansnick, 1995), que obriga o decisor a fazer comparações pareadas entre as alternativas e sugere uma escala cardinal de valor para estas. Apesar de sugerir um valor para cada alternativa, MACBETH indica em que intervalo esse valor pode variar, o que torna essa variável um dado intervalar passiva de análise pelo método da fronteira DEA nebulosa proposto neste artigo.

discriminação entre as DMUs com a utilização modelos *post* DEA. Os autores ainda propõem um modelo *post* DEA para determinar *inputs* alvos para DMUs ineficientes.

Entani et al. (2002) empregam um modelo DEA para avaliar DMUs de forma otimista. Esses resultados são utilizados para determinar a eficiência por intervalos, através da proposição de novos modelos DEA. Assim, o índice de eficiência não é representado por um número, mas sim por um intervalo de eficiência. Por outro lado, com base no modelo *Inverted DEA* (Yamada et al., 1994) avaliam cada DMU de forma pessimista e calculam índices de ineficiência por intervalos. Os autores consideram ainda dados por intervalos (*interval data*) e propõem um modelo para calcular a eficiência e a ineficiência por intervalos, tal como foi feito para os dados com valores únicos e exatos.

A avaliação do desempenho de departamentos acadêmicos de uma Universidade é realizada por Lopes e Lanzer (2002), na qual os resultados de DEA nas dimensões de ensino, pesquisa, extensão e qualidade foram modelados como números difusos e agregados através de um agregador ponderado, gerando um único índice de desempenho para cada departamento.

Cooper et al. (2001) propõem um modelo IDEA estendido. Esse modelo permite não somente o uso de dados incertos, mas também o uso de restrições aos pesos do tipo regiões de segurança ou *cone-ratio*. Nesse caso, os limites das variáveis são transformados em ajustes de dados. O modelo é aplicado à avaliação de eficiência de postos de uma companhia de telecomunicações coreana.

O modelo DEA CCR é estendido para um modelo denominado DEARA por Guo e Tanaka (2001). Esse modelo utiliza conceitos da análise de regressão e é estendido para um modelo DEA nebuloso que considera *inputs* e *outputs* difusos. Os índices de eficiência resultantes são índices de eficiência difuso (intervalares).

Kao e Liu (2000) apresentam um procedimento para medir as eficiências das DMUs que envolvem variáveis difusas. O modelo nebuloso é transformado em uma família de modelos DEA convencionais baseados em dados exatos, utilizando o enfoque  $\alpha$ -cut. Os índices de eficiência difusos obtidos são expressos através de funções intervalares, fornecendo dessa maneira, segundo os autores, maior informação para a gerência.

Para medir a eficiência técnica de DMUs, Triantis e Eeckaut (2000) relaxam o conceito de fronteira de produção, e propõem uma comparação por pares verificando a dominância ou não dominância de uma DMU quando comparada a outra. A utilização de variáveis difusas (dados imprecisos) faz com que o resultado dessa comparação seja uma comparação difusa por pares (*fuzzy pair-wise comparison*). Os resultados das comparações feitas par a par são apresentados em uma matriz, que mostra dominância em dois sentidos. Assim, não são obtidos índices de eficiência, mas uma indicação sobre quem domina quem. Deve-se realçar que caso esse modelo fosse usado com dados exatos, geraria um modelo equivalente ao FDH (*Free Disposal Hull*) (Deprins et al., 1984).

Hougaard (1999) usa intervalos difusos para unir em um índice de eficiência a informação fornecida pelos índices de eficiências analíticos (DEA) com índices de eficiência subjetivos baseados em dados que refletem aspectos qualitativos e organizacionais, expressos na forma de intervalos difusos. Uma função de um intervalo fuzzy representa a forma de especificar a relação entre esses dois tipos de informação. De forma ideal, as duas fontes de informação relacionadas ao desempenho de uma DMU podem ser unidas de forma que a “objetividade” de DEA possa ser utilizada para controlar a “subjetividade” do ponto de vista do especialista, e vice-versa. O resultado é um índice corrigido expresso na forma de um intervalo difuso.

Uma abordagem em três estágios para medir a eficiência técnica em ambiente difuso é proposta por Triantis e Girod (1998). Essa abordagem usa DEA clássico e incorpora conceitos desenvolvidos em programação paramétrica fuzzy (Carlsson e Korhonen, 1986).

Sengupta (1992) explora a teoria dos conjuntos difusos no contexto de DEA. O autor usa três tipos de estatísticas nebulosas (programação matemática nebuloso, regressão nebulosa e entropia nebulosa) para ilustrar os tipos de decisão e solução que podem ser alcançados quando os dados são vagos e a informação *a priori* é inexata e imprecisa.



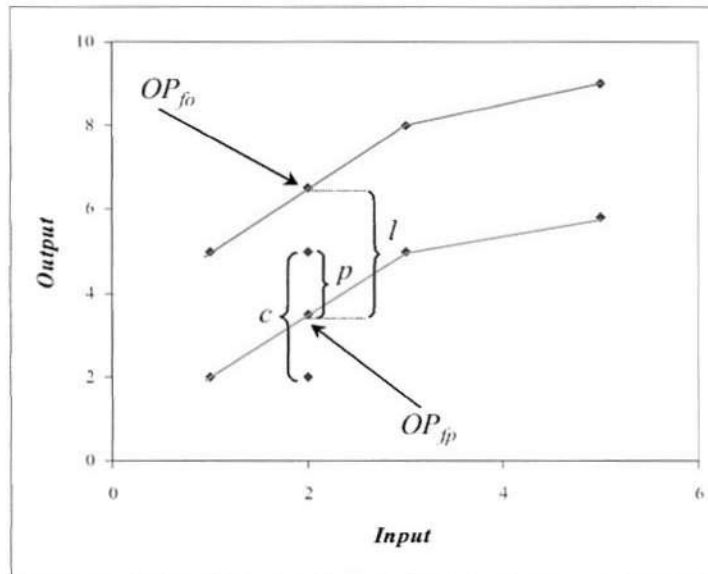


Figura 1: Fronteiras otimista e pessimista.

Na Figura 1,  $OP_{fo}$  e  $OP_{fp}$  referem-se ao *output* projetado na fronteira otimista e pessimista, respectivamente.  $c$  é comprimento da DMU, ou seja, é a diferença entre os valores otimista e pessimista do *output*;  $l$  é a largura da faixa, isto é, representa para cada DMU a diferença entre o valor do *output* incerto para as fronteiras otimista e pessimista;  $p$  é parte que está na faixa, é a diferença entre o *output* otimista de cada DMU e a interseção dessa DMU com a fronteira pessimista.

Uma vez definidos a fronteira nebulosa e os termos  $c$ ,  $l$  e  $p$ , deve-se definir o grau de pertinência de cada DMU a essa fronteira. Na Figura 2 observa-se que as DMUs  $A$  e  $F$  estão integralmente contidas na região que define a fronteira nebulosa. Essas DMUs devem ter grau de pertinência 1 à fronteira. Já as DMUs  $B$  e  $C$  apenas tocam a fronteira e, portanto, o grau de pertinência é nulo. Entre esses dois casos extremos, as DMUs poderão ter graus de pertinência intermédios.

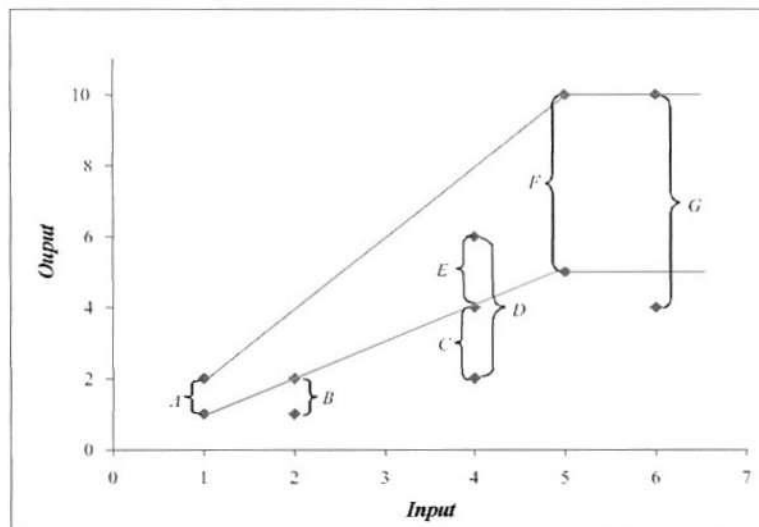


Figura 2: Fronteira nebulosa no modelo BCC.

A DMU  $G$  contém toda a largura da fronteira nebulosa, mas tem uma parte da largura da faixa externa à fronteira. Ou seja, na hipótese de *outputs* pessimistas em DEA clássico, a





DMU não seria eficiente. Assim, embora não esteja totalmente excluída da fronteira, a sua pertinência também não é total.

Considerando-se apenas situações semelhantes à da DMU  $G$ , a pertinência deveria obedecer à relação  $p/c$ , unitária quando  $p=c$ . Por outro lado, observando-se a DMU  $E$ , verifica-se que ela está totalmente contida na fronteira nebulosa, porém existe uma região da fronteira que não contém a DMU. Portanto, caso sejam considerados *outputs* otimistas em DEA clássico, a DMU não é eficiente. Para situações análogas a essa, a pertinência deveria ser  $p/l$ , unitária quando  $p=l$ . Torna-se necessário combinar os dois casos, de forma a garantir que uma DMU só tenha pertinência 1 à fronteira nebulosa se ela for eficiente tanto na hipótese pessimista quanto na otimista.

O produto das expressões usadas anteriormente, consideradas como pertinências parciais, satisfaz a essa propriedade. Assim, a pertinência à fronteira nebulosa é definida pela equação (I).

$$\wp = \frac{p^2}{lc}$$

(I)

A Tabela 1 traz os resultados de cálculo de pertinência para as DMUs da Figura 2, onde  $O_{fp}$  e  $O_{fo}$  são, respectivamente, os valores do *output* nas fronteiras pessimista e otimista, e  $l$  é o valor do *input*.

Tabela 1: Pertinências em relação à fronteira difusa.

DMU	$l$	$O_{fp}$	$O_{fo}$	$c$	$l$	$p$	$\wp$
$A$	1	1	2	1	1	1	1,00
$B$	2	1	2	1	2	0	0,00
$C$	4	2	4	2	4	0	0,00
$D$	4	2	6	4	4	2	0,25
$E$	4	4	6	2	4	2	0,50
$F$	5	5	10	5	5	5	1,00
$G$	6	4	10	6	5	5	0,83

#### 4. CÁLCULO ALGÉBRICO DA PERTINÊNCIA

O cálculo anterior baseia-se em uma definição geométrica e, portanto, só é viável em modelos extremamente simples. Para obter-se uma expressão que possa ser usada em modelos gerais, multidimensionais, em que apenas um *output* apresenta incerteza, faz-se necessário transformar as grandezas geométricas da equação (I) em quantidades que possam ser extraídas dos modelos DEA clássicos: *outputs* otimistas e pessimistas, eficiências com *output* pessimista em relação à fronteira pessimista ( $Ef_{fp}$ ) e com *output* otimista em relação à fronteira otimista ( $Ef_{fo}$ ).

Para o caso de um *output* com incerteza, considerando-se as definições clássicas de DEA e considerando-se orientação a *outputs*, e que, nesta situação, as eficiências são dadas por números maiores que a unidade, têm-se as equações (II) e (III), nas quais  $O_{fo}$  e  $O_{fp}$  são os valores nas fronteiras otimista e pessimista deste *output*.

$$Ef_{fp} = \frac{OP_{fp}}{O_{fp}}$$

(II)

$$Ef_{fo} = \frac{OP_{fo}}{O_{fo}}$$

(III)



A largura da faixa  $l$  é a diferença entre o alvo da fronteira otimista e o alvo da fronteira pessimista, ou seja,  $l = OP_{fo} - OP_{fp} = O_{fo}Ef_{fo} - O_{fp}Ef_{fp}$ . O comprimento da DMU  $c$  é a diferença entre o *output* otimista e o pessimista, isto é,  $c = O_{fo} - O_{fp}$ . A parte da DMU que está na fronteira  $p$  é a diferença entre o *output* otimista e o alvo do *output* pessimista na fronteira pessimista, desde que a diferença seja positiva. Isto implica que o *output* otimista deve estar dentro da faixa da fronteira nebulosa; caso contrário,  $p$  deve ser igual a 0. Em (IV) formaliza-se a equação para  $p$ .

$$p = O_{fo} - O_{fp}Ef_{fp}, \text{ se } O_{fo} - O_{fp}Ef_{fp} \geq 0$$

$$p = 0, \text{ caso contrário}$$

(IV)

Das relações anteriores, é possível deduzir a expressão que represente algebricamente a pertinência. Essa relação é apresentada em (V).

$$\wp = \frac{(O_{fo} - O_{fp}Ef_{fp})^2}{(O_{fo}Ef_{fo} - O_{fp}Ef_{fp})(O_{fo} - O_{fp})}, \text{ se } O_{fo} - O_{fp}Ef_{fp} \geq 0$$

$$\wp = 0, \text{ caso contrário}$$

(V)

A Tabela 2 apresenta os valores de eficiências,  $l$ ,  $c$ ,  $p$  e  $\wp$  com base nas equações (II) a (V), para o exemplo da Figura 2. Destaca-se que como a orientação do modelo é a *outputs*, as DMUs ineficientes apresentam valor de eficiência maior que 1.

Tabela 2: Valores calculados com base nas relações (II) a (V).

DMU	$l$	$O_{fp}$	$O_{fo}$	$Ef_{fp}$	$Ef_{fo}$	$c$	$l$	$p$	$\wp$
A	1	1	2	1,00	1,00	1	1	1	1,00
B	2	1	2	2,00	2,00	1	2	0	0,00
C	4	2	4	2,00	2,00	2	4	0	0,00
D	4	2	6	2,00	1,33	4	4	2	0,25
E	4	4	6	1,00	1,33	2	4	2	0,50
F	5	5	10	1,00	1,00	5	5	5	1,00
G	6	4	10	1,25	1,00	6	5	5	0,83

## 5. FRONTEIRA NEBULOSA COM UM INPUT COM INCERTEZA

De forma análoga ao que acontece com um *output* com incerteza, pode-se apresentar o caso em que haja um *input* com incerteza. Nesse caso, define-se como *input* otimista,  $I_{fo}$ , aquele com o menor valor que o *input* pode assumir, e *input* pessimista,  $I_{fp}$ , o de maior valor que o *input* pode assumir. Quando consideram-se os *inputs* otimistas para todas as DMUs, tem-se a fronteira otimista; quando consideram-se os *inputs* pessimistas para todas as DMUs, tem-se a fronteira pessimista. A Figura 3 representa as fronteiras otimista e pessimista para o caso de *input* com incerteza na mediação. Nessa figura  $I_{fo}$ ,  $I_{fp}$ ,  $IP_{fo}$  e  $IP_{fp}$  são, respectivamente, os valores otimista e pessimista do *input* e os valores do *input* projetado nas fronteiras otimista e pessimista.



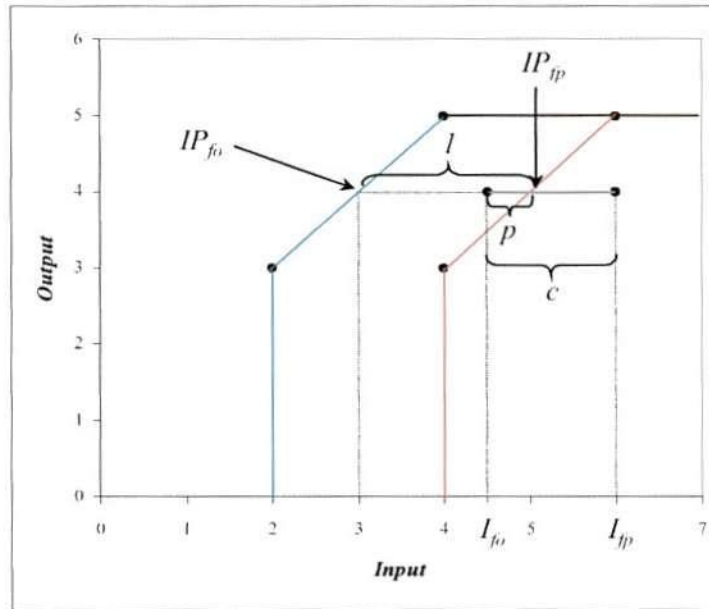


Figura 3: Fronteiras otimista e pessimista para o caso de modelo BCC orientado a *inputs*.

O segmento de reta que representa um *input* com incerteza é horizontal, ao contrário do caso orientado a *outputs* em que a DMU é representada por um segmento vertical.

Fazendo deduções semelhantes às do caso *output*, pode-se definir o índice de pertinência apresentado em (VI).

$$\varphi = \frac{(I_{ip}Ef_{ip} - I_{io})^2}{(I_{io}Ef_{io} - I_{ip}Ef_{ip})(I_{ip} - I_{io})}, \text{ se } I_{ip}Ef_{ip} - I_{io} \geq 0$$

$$\varphi = 0, \text{ caso contrário}$$

(VI)

## 6. FRONTEIRA INVERTIDA E EFICIÊNCIA FUZZY-DEA

O grau de pertinência à fronteira não é uma medida de eficiência. De fato, duas DMUs que não tenham nenhum grau de pertinência à fronteira podem ter posições relativas bem diferentes não detectadas pelo índice aqui proposto. Ou seja, ao contrário dos modelos DEA clássicos que fornecem muitos empates nos índices 100% eficientes, o enfoque apresentado neste artigo fornece empates para as DMUs totalmente não pertencentes à fronteira.

Para distinguir entre essas DMUs é necessário introduzir o conceito de fronteira invertida (Yamada et al., 1994; Novaes, 2002; Entani et al., 2002), que consiste em considerar os *outputs* como *inputs* e os *inputs* como *outputs*. Esse enfoque considera pelo menos duas interpretações. A primeira é que a fronteira consiste das DMUs com as piores práticas gerenciais (e poderia ser chamada de fronteira ineficiente); a segunda é que essas mesmas DMUs têm as melhores práticas considerando o ponto de vista oposto.

Uma fronteira invertida nebulosa pode ser utilizada para distinguir entre as diversas DMUs com grau de pertinência zero à fronteira nebulosa original. Para esse caso, quanto maior o grau de pertinência à fronteira invertida menor a eficiência da DMU.

Para obter um índice único de eficiência, deve-se englobar os dois graus de pertinência e obrigar a que a variação do índice se dê entre 0 e 1. Esse índice será chamado de *eficiência nebulosa* (ou *eficiência fuzzy-DEA*) ( $Ef_{neb}$ ) e é dado pela equação (VII), na qual  $\varphi_o$  é o grau de pertinência à fronteira original e  $\varphi_i$  é o grau de pertinência à fronteira invertida.





Os aeroportos de origem e destino são Santos Dumond (SDU), Galeão (GIG), Guarulhos (GRU) e Congonhas (CGH). As possibilidades de rotas são, assim, SDU–CGH, GIG–CGH, GIG–GRU e SDU–GRU, já apresentadas na ordem de preferência de um decisor típico.

A abordagem MACBETH sempre atribui um valor fixo 100,00 sem nenhum intervalo de variação à alternativa mais preferida. Para que todos os dados fossem intervalares foi assumido que a alternativa mais preferida (SDU–CGH) tem a sua avaliação no intervalo entre 99,99 e 100,00.

A frequência de vôos é avaliada pelo número de vôos diários de cada DMU. Já a milhagem é avaliada pelo número de vôos gratuitos conseguidos ao voar-se um trecho por cada DMU.

O modelo usado foi orientado a *outputs*, de modo a garantir coerência com os desenvolvimentos anteriores.

A Tabela 4 apresenta os dados para as diversas DMUs referentes ao mês de novembro de 2002. A Tabela 5 apresenta os resultados do modelo fuzzy-DEA proposto, em relação à fronteira original, assumindo-se retornos constantes de escala.

Tabela 4: *Inputs e outputs* do estudo de caso.

DMU	<i>Input</i>		<i>Outputs</i>		
	Preço	Nº de vôos	Milhagem	Rota pessimista	Rota otimista
VARIG SDU-CGH	287,00	36	0,10	99,99	100,00
VARIG GIG-GRU	211,25	8	0,05	50,10	58,70
TAM GIG-CGH	211,25	4	0,10	82,40	99,90
TAM GIG-GRU	211,25	4	0,10	50,10	58,70
TAM SDU-CGH	294,20	26	0,10	99,99	100,00
VASP GIG-GRU	237,00	4	0,11	50,10	58,70
VASP SDU-CGH	237,00	16	0,11	99,99	100,00
GOL GIG-CGH	159,00	4	0,00	82,40	99,90
GOL SDU-CGH	219,00	12	0,00	99,99	100,00
FLY GIG-GRU	109,00	1	0,00	50,10	58,70
Ocean Air SDU-GRU	228,00	1	0,00	64,80	76,40

Tabela 5: Eficiências otimista e pessimista e grau de pertinência à fronteira nebulosa original.

DMU	Eficiência pessimista	Eficiência otimista	$\varphi_o$
VARIG SDU-CGH	1,000	1,000	1,000
VARIG GIG-GRU	1,791	1,634	0,000
TAM GIG-CGH	1,000	1,000	1,000
TAM GIG-GRU	1,000	1,000	1,000
TAM SDU-CGH	1,126	1,132	0,000
VASP GIG-GRU	1,020	1,020	0,766
VASP SDU-CGH	1,000	1,000	1,000
GOL GIG-CGH	1,000	1,000	1,000
GOL SDU-CGH	1,021	1,146	0,000
FLY GIG-GRU	1,126	1,164	0,052
Ocean Air SDU-GRU	1,822	1,873	0,000

Nota-se que várias DMUs têm índices de pertinência igual a 1 e várias delas têm índice de pertinência nulo. Para melhor discriminar as unidades, calcula-se a pertinência à fronteira invertida, tal como indicado anteriormente (seção 6). Na Tabela 6 apresentam-se os resultados obtidos ao aplicar-se o conceito de fronteira invertida.



Tabela 6: Eficiências otimista e pessimista e grau de pertinência à fronteira nebulosa invertida.

DMU	Eficiência pessimista	Eficiência otimista	$\beta_i$
VARIG SDU-CGH	0,681	0,784	0,000
VARIG GIG-GRU	1,000	1,000	1,000
TAM GIG-CGH	0,619	0,604	0,000
TAM GIG-GRU	0,911	0,912	0,172
TAM SDU-CGH	0,698	0,803	0,000
VASP GIG-GRU	1,000	1,000	1,000
VASP SDU-CGH	0,556	0,640	0,000
GOL GIG-CGH	0,697	0,697	0,000
GOL SDU-CGH	0,961	0,961	0,000
FLY GIG-GRU	0,618	0,622	0,000
Ocean Air SDU-GRU	1,000	1,000	1,000

Finalmente, na Tabela 7 estão os valores do índice de eficiência nebulosa.

Tabela 7: Índice de eficiência fuzzy-DEA.

DMU	$E_{f_{neb}}$
VARIG SDU-CGH	1,00
TAM GIG-CGH	1,00
VASP SDU-CGH	1,00
GOL GIG-CGH	1,00
TAM GIG-GRU	0,91
FLY GIG-GRU	0,53
TAM SDU-CGH	0,50
GOL SDU-CGH	0,50
VASP GIG-GRU	0,38
VARIG GIG-GRU	0,00
Ocean Air SDU-GRU	0,00

Dos resultados da Tabela 7, observa-se que as quatro principais companhias são eficientes em alguma rota. As três companhias mais antigas, VARIG, VASP e TAM, são eficientes na rota considerada nobre pelo mercado (SDU-CGH). Já a companhia aérea GOL tem baixa eficiência nessa rota, mas é eficiente da rota GIG-GRU em que foi pioneira na exploração com tarifas bastante baixas.

Observa-se ainda que quatro DMUs permanecem empatadas, com eficiência nebulosa igual a 1. Isso deve-se ao fato de que a fronteira invertida é determinada por DMUs muito pouco atrativas para os passageiros. Assim, essa fronteira localiza-se muito distante da fronteira eficiente, o que diminui substancialmente a sua função de melhorar a discriminação.

## 8. CONCLUSÕES

A abordagem proposta neste artigo para incorporação de incertezas aos modelos DEA clássicos tem a vantagem de não arbitrar, nem uma determinada distribuição de probabilidade para as incertezas das variáveis, nem uma função nebulosa para as mesmas. É, ao mesmo tempo, matematicamente simples, já que os resultados são obtidos através de simples cálculos algébricos, sem necessidade de usar programação linear nebulosa.

Ao determinar uma região onde se encontra a fronteira difusa e ao construir geometricamente uma função de pertinência e, conseqüentemente, a medida de eficiência difusa, os desenvolvimentos deste artigo situam-se próximos à origem dos conjuntos difusos sem, no entanto, usar suas funções características.

Adicionalmente, o índice proposto para medir a eficiência difusa, permite resolver um dos principais problemas em DEA, qual seja de as DMUs poderem ser eficientes atribuindo peso nulo a vários multiplicadores (Lins e Angulo-Meza, 2000). Com efeito, para uma DMU





possuir alta eficiência, esta deve ter um elevado grau de pertinência em relação à fronteira otimista e baixo grau em relação à fronteira pessimista. Dessa forma, todas as variáveis são levadas em conta no índice final. Assim, não basta a DMU ter bom desempenho naquilo em que ela é melhor: também não pode ter um mau desempenho no critério em que for pior. Isso é conseguido sem a atribuição de nenhum peso subjetivo a qualquer critério.

Essa característica permite eliminar outro dos inconvenientes dos modelos DEA BCC: o fato de a DMU de maior *output* ser eficiente independentemente dos valores dos *inputs* (Ali, 1993). No modelo aqui proposto, o valor da eficiência de tal DMU depende também de sua posição em relação à fronteira invertida. Deve ser ressaltado que existem outros métodos para resolver esse problema. Entretanto, ou exigem julgamentos subjetivos, como é o caso das restrições aos pesos (Allen et al., 1997) ou, alternativamente, exigem métodos matemáticos mais sofisticados, como é o caso da suavização da fronteira (Soares de Mello et al., 2002) (28).

Os próximos desenvolvimentos envolvem sua aplicação a casos reais de avaliação de eficiência com incerteza nas variáveis e o aumento da cardinalidade das variáveis com incerteza, já que os desenvolvimentos aqui apresentados basearam-se para os casos de um *input* ou de um *output* com incerteza na medição.

## REFERÊNCIAS

- (1) Ali, A.I. (1993). Streamlined computation for data envelopment analysis. *European Journal of Operational Research*, **64**, 61-67.
- (2) Allen, R., Athanassopoulos, A., Dyson, R.G. & Thanassoulis, E. (1997). Weights restrictions and value judgements in data envelopment analysis: evolution, development and future directions. *Annals of Operations Research*, **73**, 13-34.
- (3) Bana e Costa, C.A. & Vansnick, J.C. (1995). A theoretical framework for Measuring Attractiveness by a Categorical Based Evaluation Technique (MACBETH). In: *Multicriteria Analysis* [edited by J.C.N. Clímaco]. Springer Verlag, Berlin.
- (4) Banker, R.D., Charnes, A. & Cooper, W.W. (1984). Some models for estimating technical scale inefficiencies in Data Envelopment Analysis. *Management Science*, **30** (9), 1078-1092.
- (5) Carlsson, C. & Korhonen, P. (1986). A Parametric Approach to Fuzzy Linear Programming. *Fuzzy Sets and Systems*, **20**, 17-33.
- (6) Charnes, A., Cooper, W.W. & Rhodes, E. (1978). Measuring the efficiency of decision making units. *European Journal of Operational Research*, **2**, 429-454.
- (7) Coelli, T., Rao, D.S.P. & Battese, G.E. (1998). *An Introduction to Efficiency and Productivity Analysis*. Kluwer Academic Publishers, Boston.
- (8) Cooper, W.W., Park, K.S. & Yu, G. (2001). An illustrative application of IDEA (imprecise Data Envelopment Analysis) to a Korean mobile telecommunication company. *Operations Research*, **49** (6), 807-820.
- (9) Cooper, W.W., Park, K.S. & Yu, G. (1999). IDEA and AR-IDEA: Models for dealing with imprecise data in DEA. *Management Science*, **45**, 597-607.
- (10) Cooper, W.W., Seiford, L.M. & Tone, K. (2000). *Data Envelopment Analysis: A Comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA-Solver Software*. Kluwer Academic Publishers, Boston.
- (11) Deprins, D., Simar, L. & Tulkens, H. (1984). Measuring Labor Inefficiency in Post Offices. In: *The Performance of Public Enterprises: Concepts and Measurements* [edited by M. Marchand, P. Pestieau & H. Tulkens]. North-Holland, Amsterdam, 243-267.
- (12) Despotis, D.K. & Smirlis, Y.G. (2002). Data envelopment analysis with imprecise data. *European Journal of Operational Research*, **140**, 24-36.
- (13) Entani, T., Maeda, Y. & Tanaka, H. (2002). Dual Models of Interval DEA and its extensions to interval data. *European Journal of Operational Research*, **136**, 32-45.
- (14) Guo, P. & Tanaka, H. (2001). Fuzzy DEA: a perceptual evaluation method. *Fuzzy Sets and Systems*, **119**, 149-160.
- (15) Hougaard, J.L. (1999). Fuzzy scores of technical efficiency. *European Journal of Operational Research*, **115**, 529-541.



- (16) Kao, C. & Liu, S.T. (2000). Fuzzy efficiency measures in data envelopment analysis. *Fuzzy Sets and Systems*, **113**, 427-437.
- (17) Lertworasirikul, S., Fang, S.C., Joines, J.A. & Nuttle, H.L.W. (2003). Fuzzy data envelopment analysis (DEA): a possibility approach. *Fuzzy Sets and Systems* (to appear).
- (18) Lins, M.P.E. & Angulo-Meza, L. (2000). *Análise Envoltória de Dados e perspectivas de integração no ambiente de Apoio à Decisão*. Editora da COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro.
- (19) Lopes, A.L.M. & Lanzer, E.A. (2002). Data envelopment analysis – DEA and fuzzy sets to assess the performance of academic departments: a case study at Federal University of Santa Catarina – UFSC. *Pesquisa Operacional*, **22** (2), 217-230.
- (20) Lovell, C.A.K. (1993). Production frontiers and production efficiency”. In: *The measurement of productive efficiency: techniques and applications* [edited by H.O. Fried, C.A.K. Lovell & S.S. Schmidt]. Oxford University Press, New York, 3-67.
- (21) Novaes, L.F.L. (2002). *Envoltória Sob Dupla ótica aplicada na avaliação imobiliária em ambiente do sistema de informação geográfica*. Tese de Doutorado, Programa de Engenharia de Produção, UFRJ, Rio de Janeiro, Dezembro.
- (22) Petrovic, S., Petrovic, R. (2002). A New Fuzzy Multi-criteria Methodology for Rankin of Alternatives. *International Transactions in Operational Research*, **9**, 73-84.
- (23) Sant’Anna, A.P. (2002). Cálculo probabilístico de produtividades globais no ensino de pós-graduação em Engenharia de Produção. *Anais do VIII Encontro de Educação em Engenharia*, Petrópolis.
- (24) Sant’Anna, A.P. (2003). Compositions of Fuzzy Preferences. *Relatórios de Pesquisa em Engenharia de Produção- Universidade Federal Fluminense*, **2**. Disponível em <<http://www.producao.uff.br/rpep/relpesq103/001relpesq103.htm>>.
- (25) Sengupta, J.K. (1992). A fuzzy systems approach in data envelopment analysis. *Computers & Mathematics with Applications*, **24** (8-9), 259-266.
- (26) Soares de Mello, J.C.C.B., Gomes, E.G., Biondi, L.N. & Gomes, L.F.A.M. (2002). Avaliação multicritério das opções de ligação aérea Rio-São Paulo. *Anais do XVI Congresso de Pesquisa e Ensino em Transportes (ANPET)*, **2**, 449-457.
- (27) Soares de Mello, J.C.C.B., Gomes, E.G., Biondi, L.N., Angulo-Meza, L. (2002). Construção de uma fronteira eficiente nebulosa na presença de dados com incertezas na medição. *Anais do XXXIV Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, Rio de Janeiro, Outubro.
- (28) Soares de Mello, J.C.C.B., Lins, M.P.E. & Gomes, E.G. (2002). Construction of a smoothed DEA frontier. *Pesquisa Operacional*, **22** (2), 183-201.
- (29) Triantis, K. & Eeckaut, P.V. (2000). Fuzzy Pair-wise Dominance and Implications for Technical Efficiency Performance Assessment. *Journal of Productivity Analysis*, **13**, 207-230.
- (30) Triantis, K. & Girod, O. (1998). A Mathematical Programming Approach for Measuring Technical Efficiency in a Fuzzy Environment. *Journal of Productivity Analysis*, **10** (1), 85-102.
- (31) Yamada, Y, Matui, T. & Sugiyama, M.(1994). New analysis of efficiency base don DEA. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **37** (2), 158-167.
- (32) Zadeh, L. (1965). Fuzzy Sets. *Information and Control*, **8** (3), 338-353.
- (33) Zadeh, L. (1978). Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility. *Fuzzy Sets and Systems*, **1**, 3-28.
- (34) Zhu, J. (2003). Imprecise data envelopment analysis (IDEA): A review and improvement with an application. *European Journal of Operational Research*, **144**, 513-529.

10