ASPECTOS TEÓRICOS SOBRE INCORPORAÇÃO DE RISCO EM MODELOS DE DECISÃO*

Por Elmar Rodrigues da Cruz**

I. INTRODUÇÃO

O objetivo do presente trabalho é apresentar alguns pontos teóricos que servirão de referência para os estudos empíricos a serem apresentados em seguida. Serão expostas idéias de como riscos e incertezas poderiam ser incorporados em modelos de tomada de decisão de um modo geral. Para isto tratar-se-á de expor de forma sucinta os principais modelos de risco e incerteza que tem sido apresentados pela literatura e especificar as referências bibliográficas mais relevantes.

Convém lembrar logo de início que a diferenciação clássica entre situações de risco e incerteza apresentadas pelo Prof. Knight (1921) não é estritamente apropriada para o caso da agricultura. Caracterizaremos aqui uma situação de risco onde o agricultor (ou pesquisador) tenha uma idéia subjetiva da probabilidade da ocorrência de determinado evento. Não serão abordada portanto, a probabilidade objetiva (isto é, o limite da frequência relativa, computado através de fórmulas apresentadas em Livros texto de Estatística) conforme havia pensado o Prof. Knight, uma vez que na agricultura a disponibilidade de dados não permite um tratamento assintótico de probabilidades. Quanto as situações de incerteza, estas seriam caracterizadas por uma absoluta ignorância por parte do tomador de decisões, quanto às probabilidades da ocorrência dos eventos, segundo o Prof. Knight.

Também a situação de absoluta ignorância não é estritamente aplicável. Evidentemente todos nós temos subjetivamente uma idéia de probabilidades. O que ocorre é que cada um, via de regra, tem uma idéia pessoal diferente da dos

---

* Capítulo 3 do Livro "Pesquisa e Planejamento Agrícola: Fertilidade do Solo Análise Econômica". Trabalho em preparação pelo DDM/EMBRAPA.

** Economista Agrícola, Ph.D., Pesquisador do DDM/EMBRAPA.

outros. Por exemplo, se perguntarmos a 10 pessoas qual a probabilidade do Brasil vir o ganhar o próximo campeonato mundial de futebol, é quase certo que teremos 10 respostas diferentes. Dentro desta ótica, o conceito de incerteza coincide com o de risco com probabilidades subjetivas, podendo os termos risco e incerteza serem usados indistintamente.

Vale a pena lembrar que no ambiente agrícola, onde o conhecimento dos eventos é imperfeito, não existe o conceito de ótimo absoluto. Uma técnica pode ser melhor que a outra somente sob determinadas circunstâncias, tendo em conta por exemplo os diversos objetivos dos produtores que dependem das suas atitudes subjetivas quanto ao risco. Com isto queremos dizer que a hipótese clássica de maximização do lucro pode não ser sempre a mais apropriada no contexto agrícola, podendo o agricultor ter em mente objetivos bem mais diversos, tal como a segurança de uma renda mínima. Por esta razão, a pesquisa necessita de se preocupar não apenas com os retornos médios de alternativas tecnológicas, mas também com o desempenho destas em condições desfavoráveis.

Caso o agricultor venha a ter uma idéia do risco envolvido na tecnologia melhorada, e se porventura na pior das hipóteses a adoção desta trouxesse ganhos maiores que os ganhos provenientes da tecnologia tradicional, então haveria bem maiores possibilidades do agricultor aceitá-la mais protamente. Para o agricultor o que melhor caracteriza risco é o desvio entre aquilo que ele espera ganhar e o que ele teme ganhar (perder?) em situações desfavoráveis, muito embora na mesa de jogo este mesmo agricultor possa ter um comportamento completamente oposto.

Portanto, sempre que possível, os resultados da pesquisa poderiam ser medidos não apenas em retornos médios esperados (Cr$) como também seriam dimensionados os retornos mínimos que ocorreriam em situações desfavoráveis (exemplo: decorrentes de pouca chuva). Estes retornos mínimos deveriam ser comparados com os obtidos através da tecnologia em uso. Com estes dados o agricultor terá bem maiores probabilidades de aceitar os resultados da pesquisa.

A apresentação que segue aborda inicialmente a incorporação de risco em modelos que se prestam a comparações isoladas (individuais) de ações alternativas. Mais adiante serão explicados os modelos que abrangem a propriedade rural como um todo, usando programação matemática.

II - MODELOS DE INCORPORAÇÃO DE RISCO EM DECISÕES ISOLADAS (INDIVIDUAIS)

II.1 - O PRINCIPIO DE BERNOULLI

A teoria da decisão de Bernoulli é uma abordagem generalizada para tomada de decisão sob condições de risco. É uma teoria normativa baseada em probabilidades subjetivas de um tomador de decisão a respeito da ocorrência de eventos incertos, e em preferências pessoais pelas consequências potenciais destes eventos incertos DILLON (1971).

O princípio de Bernoulli colocado em termos de um único objetivo (ex. maximizar a utilidade esperada dos retornos ou da renda) envolve os axiomas de ordenamento, continuidade e independência.

Segundo DILLON estes axiomas podem ser especificados como segue:

1) Ordenamento: A ordem de preferência de uma pessoa por alternativas de ação pode ser representada por um ordenamento. Desta forma uma pessoa confrontada com duas alternativas A e B quaisquer, ou prefere A ou prefere B ou é indiferente entre ambas.

   Num modo geral, o axioma de ordenamento assegura a transitividade da escolha de eventos incertos por parte do tomador de decisão, no sentido de que se A é preferido a B e B é preferido a C, então A será preferido a C.

2) Continuidade: O axioma da continuidade implica na existência de equivalente assegurado (certainty equivalent) tendo em vista que sob este axioma sempre existe uma quantia certa B que se tornará indiferente a uma loteria envolvendo os eventos incertos A e B para uma dada probabilidade p de A ocorrer e 1-p de C ocorrer.

3) **Independência:** O axioma da independência implica que a presença de um evento C não distorcerá a escolha entre dois eventos A e B.

Estes três axiomas resultam no princípio de Bernoulli, também conhecido pelo Teorema da Utilidade Esperada ou ainda pelo Teorema Fundamental da Teoria da Utilidade de Von Neumann - Morgenstern. Este teorema afirma que se os 3 axiomas dados acima não forem violados, então existe uma função U de utilidade para um tomador de decisão que associa um único índice de utilidade para qualquer evento incerto com o qual o tomador de decisão se defronta.

As propriedades desta função U de utilidade são:

(i) Se A é preferido a B então

$U(A) > U(B)$

(ii) Se $U(A) > U(B)$ então A será preferido a B (para assegurar transitividade)

(iii) $U(A) = E\ U(A)$

(iv) $U(A = a.U(A) + b \qquad a > 0$

O ordenamento dos eventos incertos é assegurado pelas propriedades (i) e (ii) da função U, que são originadas da característica da transitividade dos axiomas.

O axioma da continuidade permite a mensuração dos níveis de probabilidade P_j para dados níveis dos eventos X_j ou alternativamente, permite a elicitação dos níveis dos eventos X_j para dados níveis de probabilidade P_j.

Em que pese a consistência da teoria de Bernoulli, merece destaque o fato desta ser de aplicação muito geral, pouco dizendo sobre o comportamento dos indivíduos.

Mais especificamente, os axiomas e as propriedades de U não dão nenhuma indicação se o tomador de decisão é averso, indiferente ou propenso ao risco*. Por outro lado, nada se pode inferir sobre o formato de U nem sobre quais sejam os momentos relevantes para análise das distribuições de probabilidade dos eventos.

II.2 - O MODELO MÉDIA-VARIANCIA (E-V)

Tendo em vista que o excessivo grau de generalidade do Teorema da Utilidade Esperada dificulta a sua aplicação empírica, várias são as tentativas feitas na literatura objetivando tornar este teorema operacional do ponto de vista empírico. Para uma visão detalhada das abordagens alternativas usadas na literatura com este fim, veja-se DA CRUZ (1979).

Um passo inicial dado no sentido de restringir a generalidade do teorema da Utilidade Esperada foi a análise média-variância (E-V Analysis), que considera apenas os dois primeiros momentos das distribuições de probabilidade' dos retornos ou da renda MARKOWITZ (1959). A análise E-V pode ser rigorosamente derivada dos axiomas da teoria de Bernoulli, sob duas hipóteses MARKOWITZ (1959); TOBIN (1958), FELDSTEIN (1969):

1 - Presumindo-se que a função de utilidade do tomador de decisão seja quadrática, ou;

2 - Supondo-se que a distribuição de probabilidade dos retornos seja normal.

A análise E-V presume que o tomador de decisão escolha a alternativa que apresente menor variância para uma mesma média, ou a alternativa que apresente maior média para um nível igual de variância. Quando uma alternativa A comparada com uma alternativa B apresentar maior média e maior variância, então diz-se que ambas as alternativas são eficientes sob o critério da análise

---

* KOCH (1974) tentou mostrar que o princípio de Bernoulli implica em aversão ao risco. Entretanto, BITZ e ROGUSCH (1976) mostraram que os resultados de Koch são baseados numa interpretação errônea dos axiomas da teoria.

E-V. Esta característica da análise E-V tende a ser indesejável pois em certos casos uma alternativa A pode apresentar um retorno médio muito superior, e apenas um pequeno acréscimo de variância em relação a B será o suficiente para tornar ambas as alternativas igualmente desejáveis.

Para superar tal dificuldade da análise E-V vários autores introduziram na literatura diferentes critérios para a escolha de alternativas sob condições de risco. Entre estes critérios pode-se citar os métodos "ad hoc", ou seja, não baseados em derivação teórica ou em axiomas. Tais métodos normalmente consistem em regras de algibeira onde a preocupação maior é a segurança do tomador de decisão ao invés da maximização da sua utilidade esperada. Por isto são chamados de critérios de segurança-primeiro (safety-first), entre os quais destacamos:

- critério da segurança mínima ROY (1952).
- Critério da máxima chance condicionada TELSER (1955), ou suas variantes BAUMOL (1963); BOUSSARD e PETIT (1967); WEBSTER e KENNEDY (1975).
- Critério da segurança fixa KATAOKA (1963), cujo caso especial é o conhecido Maximin (Máximo dos Mínimos ganhos) usado em teoria dos jogos, McINERNEY (1967 e 1969).

Detalhes sobre estes critérios estão explicados em ROUMASSET (1976) e ANDERSON (1976).

II.3 - DOMINÂNCIA ESTOCÁSTICA - D.E.

Como o risco é algo subjetivo, intrínseco à formação psicológica de cada tomador de decisão, é extremamente onerosa a técnica de se obter as funções-utilidade de cada um para se aplicar o princípio de Bernoulli explicado acima. Para contornar tal problema, foram desenvolvidas regras de dominância estocástica, que levam em conta toda a distribuição cumulativa de probabilidade dos retornos ao invés de simplesmente média e variância. Referências a respeito podem ser encontradas em QUIRK e SAPOSNIK (1962), HADAR e RUSSELL (1969), ANDERSON (1974) e MEYER (1977).

As preferências do tomador de decisão para x estão consubstanciadas numa função de utilidade U(x) que é definida para todos os valores de x no intervalo $[a, b]$.

II.3.1 - Primeiro Grau de Dominância Estocástica (PDE)

Presume que os tomadores de decisão preferem mais x do que menos. Isto quer dizer que U(x) é monotonicamente crescente entre $[a, b]$ ou seja,

$$U_1(x) = \frac{\partial U(x)}{\partial x} > 0$$

Obviamente a distribuição de probabilidade f(x) dominará g(x) por PDE se e somente se $F_1(R) \leq G_1(R)$ para todos os R em $[a, b]$ com sinal de inegualdade estrita para pelo menos um valor de R, onde:

$$P_1(R) = \int_a^R f(x)\, dx$$

$$G_1(R) = \int_a^R f(x)\, dx$$

ou seja, são as funções de distribuição acumuladas (PDA) de f(x) e g(x) no intervalo $[a, b]$. É implícito que f(x) e g(x) são funções de densidade para a variável x dentro do intervalo $[a, b]$.

A prova de que f(x) é preferida a g(x) por (PDE) e contida em ANDERSON (1974).

II.3.2 - Segundo Grau de Dominância Estocástica (SDE)

Assume-se que quantidades adicionais sucessivas de x tem valor cada vez menor ao tomador de decisão,

ou seja $$\frac{\partial^2 U(x)}{\partial x^2} = U_2(x) < 0$$

temos o caso de uma utilidade marginal decrescente, e como $U_1(x) > 0$, a função é côncava com respeito à variações em x, e o indivíduo reage como tendo aversão ao risco.

A distribuição f(x) dominará g(x) por SDE se e :
$G_2(R)$ para todos os R possíveis com a estrita inegualdade pı
menos um valor de R,

$$\text{onde: } F_2(R) = \int_a^R F_1(x) \, dx$$

$$G_2(R) = \int_a^R G_2(x) \, dx$$

Figura 1.A - ILUSTRAÇÃO DO P.D.E.

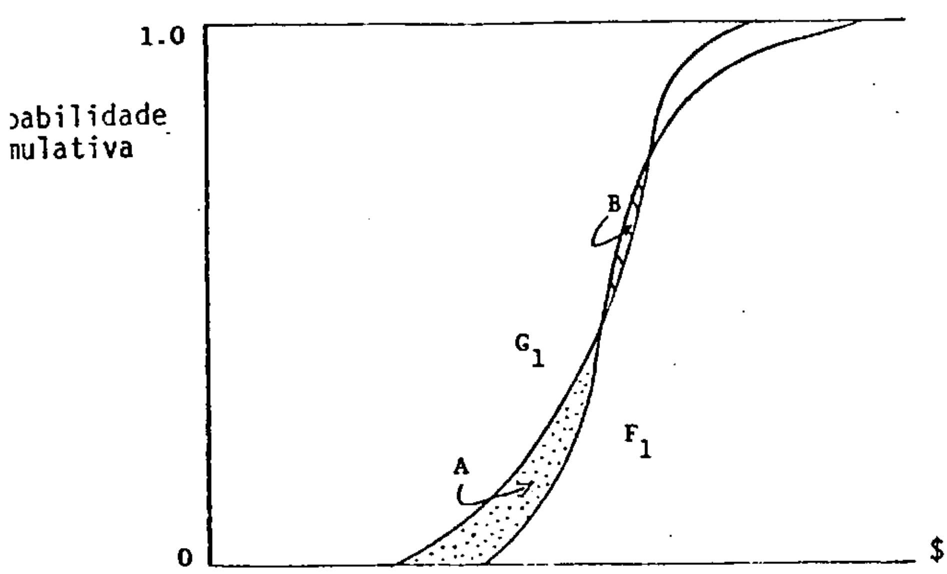
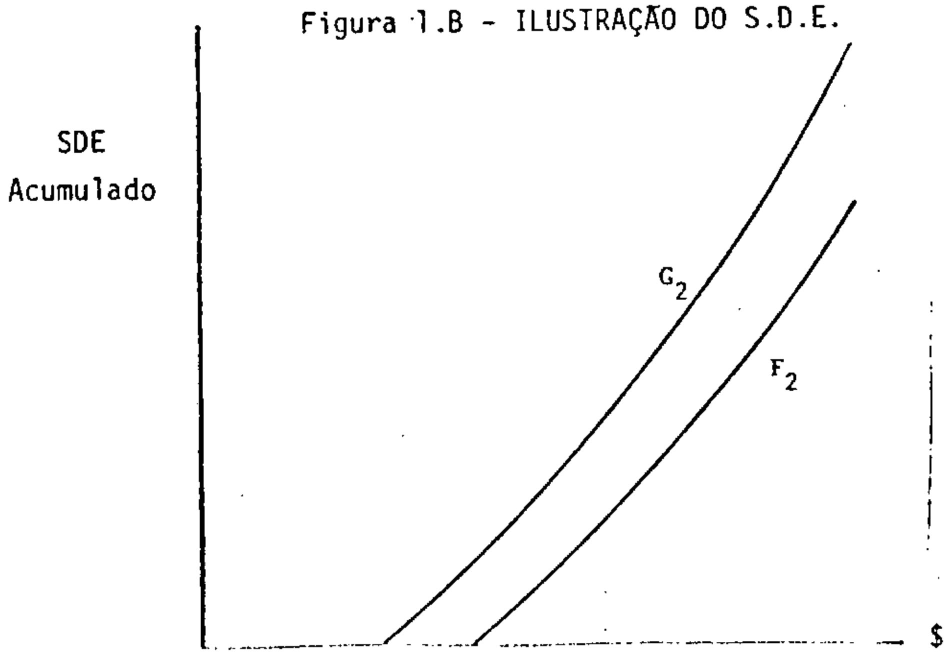


Figura 1.B - ILUSTRAÇÃO DO S.D.E.



No quadro 1.a H_1 é eliminado por PDE, pois é inferior em todos os pontos a F_1 e G_1.

Podemos também eliminar G_1 pois ele se cruza duas vezes com F_1, e a área maior é A, à esquerda de F_1.

Isto é melhor evidenciado no quadro 1.b, onde F_2 apresenta maiores valores de x para todas as probabilidades.

II.3.3 - Terceiro Grau de Dominância Estocástica (TDE)

Muitas vezes o conjunto de distribuições da variável x, após a seleção por PDE e SDE, ainda é muito grande. Ainda poderá haver muitas opções que não passaram de crivo inicial, e que ainda não foram dominadas estocasticamente, isto é, são consideradas ainda eficientes.

Temos em mãos um terceiro critério de seleção de opções eficientes

onde: $$\frac{\partial^3 U(x)}{\partial x^3} = U_3(x) > 0$$

que adicionado aos dois primeiros $U_1(x) > 0$ e $U_2(x) < 0$ completa os critérios de separação entre opções eficientes e ineficientes (as não dominadas das dominadas estocasticamente).

Dizemos que f(x) domina g(x) por TDE se e somente se $P_3(R) \leq G_3(R)$ para todos os R em $[a, b]$ com sinal de inegualdade estrito para pelo menos um valor de R,

onde: $$P_3(R) = \int_a^R F_2(x)\, dx$$

$$G_3(R) \quad \int_a^R G_2(x)\, dx$$

II.3.4 - Aplicações para Distribuições Discretas

Toma-se todas as n observações da variável x em ordem ascendente oriundas de digamos duas distribuições de probabilidade $f(x_1)$ e $g(x_1)$.

Com os X_1 apresentados nesta ordem ascendente para $f(x_i)$ e $g(x_i)$, usa-se os resultados abaixo que são os relativos à distribuições discretas, adaptados dos resultados anteriores relativos à distribuições contínuas.

O cálculo de PDE para funções discretas pode ser assim especificado:

A partir de função de distribuição acumulada obtida através de n observações de x_i,

$$F_1(R) = P(x \leq R)$$

$$F_1(x_r) = \sum_{i=1}^{r} f(x_i) \qquad (r = 1 \ldots n)$$

temos que PDE pode ser especificada como: $f(x_i)$ domina $g(x_i)$ se e somente se $F_1(x_i) \leq G_1(x_i)$ para todos os x_i, com inegualdade estrita para pelo menos um valor de x_i. Após a aplicação de PDE tomamos as opções não dominadas (eficientes) e passamos para SDE.

O cálculo de SDE para funções discretas pode ser expresso como segue:

No caso de Dominância Estocástica de Segundo Grau, temos:

$$F_2(x_r) = \sum_{i=1}^{r} F_1(x_i) \; \Delta x_i \qquad (r=1 \ldots n-1)$$

sendo $\Delta x_i = x_i + 1 - x_i$

e x_n é o valor mais alto tomado por x.

Assim se $F_2(x_r) \leqslant G_2(x_r)$ para todos os $r < n$ e $U_1(x) > 0$, $U_2(x) < 0$, então $f(x_i) \geqslant g(x_i)$.

Como SDE impõe mais restrições que PDE nas funções de preferência, após o seu crivo o conjunto de opções eficientes poderá ser menor.

O TDE é ainda mais restritivo, e portanto poderá reduzir bastante o conjunto de opções eficientes. Teremos então apenas opções que satisfaçam todas estas restrições:

- $U_1\ (x) > 0$ (mais x é preferido que menos x)
- $U_2\ (x) > 0$ (decrescente utilidade marginal)
- $U_3\ (x) > 0$ (decrescente aversão ao risco)

TDE é expresso, no caso discreto,por:

$$F_3\ (x_r) = \sum_{i=1}^{r} P_2(x_i)\ \Delta x_i \qquad (r = 1 \ldots n - 1)$$

No âmbito da pesquisa agropecuária as técnicas de dominância estocástica apresentados acima são ilustradas por GARCIA e CRUZ (1979).

II.3.5 - A Generalização da Dominância Estocástica

MEYER (1977) mostrou que pode-se relaxar a hipótese restritiva de que todos os tomadores de decisão são aversos ao risco, implicita no segundo grau de D.E. explicado acima.

A alternativa exposta por MEYER é o conceito de dominância estocástica com respeito a uma função. Detalhes sobre esta abordagem podem ser encontrados em CROCOMO (1979).

II.4 - OS MÉTODOS DE HANOCH E LEVY PARA INCORPORAÇÃO DE RISCO

O critério de HANOCH e LEVY (1970) para incorporação de risco usado neste trabalho é baseado nos axiomas de Bernoulli e no Teorema da Utilidade Esperada, com as seguintes hipóteses adicionais:

1) A função de utilidade do tomador de decisão é quadrática;

2) A função de distribuição de probabilidade dos retornos é simétrica. Sob estas condições, o critério de Hanoch e Levy é um caso especial das regras de dominância estocástica que não presumem simetria e nem tampouco qualquer forma específica da função de utilidade.

Hanoch e Levy derivaram outros critérios usando hipóteses alternativas*, mas nos ateremos ao caso da simetria, pelas seguintes razões:

1) Existe extensa literatura que usa e justifica a hipótese de funções de utilidade quadráticas, como uma aproximação razoável para o comportamento do tomador de decisão, pelo menos dentro de um certo intervalo de retornos. A este respeito veja-se FELDSTEIN (1969), TSIANG (1972), TOBIN (1958) e ANDERSON (1973).

2) A hipótese da simetria das distribuições de probabilidade das variáveis sob investigação pode ser satisfeita a partir de uma grande variedade de distribuições (ex.: normal, uniforme, triangular, beta, etc.). Estudos empíricos reportados em DA CRUZ (1979) evidenciam que para aplicações agrícolas as distribuições de rendimentos e preços esperados são aproximadamente simétricas. Por outro lado o uso de distribuições simétricas é mais aceitável relativamente a hipótese de normalidade, que é bem mais forte e que tem sido usada por FREUND (1956) e WIENS (1976) em aplicações na agricultura.

A função de utilidade quadrática pode ser representada da seguinte forma:

(1) $U(X) = a + bX + cX^2$

onde X é uma variável aleatória representando o retorno ou a rentabilidade esperada (num dado período de tempo) das alternativas sob consideração do

---

* Entre estas podemos citar a hipótese da função de utilidade cúbica e o pressuposto de assimetria previamente conhecida das distribuições de probabilidade dos retornos.

tomador de decisão. Neste caso, presumindo-se utilidade marginal positiva, teremos

(2) $U'(X) = b + 2cX > 0$

Supondo-se aversão ao risco por parte do tomador de decisão (veja-se evidências empíricas em DILLON e SCANDIZZO (1978) então:

(3) $U''(X) = 2c < 0$

Equações (2) e (3) implicam que X é limitado no intervalo $X < K$ onde $K = -b/2C$ maior que 0.

Desta forma a função de utilidade quadrática poderá ser representada por:

(4) $U(X) = 2KX - X^2 \qquad (K > 0; \; X < K)$

Para comparar-se duas distribuições simétricas, Hanoch e Levy derivaram a seguinte regra:

X_1 dominará X_2 se

(5) $2(\mu_1 - \mu_2)\sigma_1 + (\mu_1 - \mu_2)^2 - (\sigma_1^2 - \sigma_2^2) > 0$

onde:

$\mu_1 = E(X_1)$

$\mu_2 = E(X_2)$

$\sigma_1 = \sqrt{Var(X_1)}$

$\sigma_2 = \sqrt{Var(X_2)}$

Quando o número de alternativas a serem comparadas é muito grande o método de Hanoch e Levy tem a vantagem de reduzir bastante o número de alternativas eficientes, ou seja, ele dispõe de alto poder de discriminação entre alternativas. Uma ilustração deste método é apresentado em FONSECA e DA CRUZ (1981).

III - MODELOS DE INCORPORAÇÃO DE RISCO PARA A PROPRIEDADE RURAL COMO UM TODO

III.1 - MOTAD

Serão vistos agora os modelos de risco que usam programação matemática. Tais modelos são mais apropriados para o planejamento da propriedade rural como um todo.

HOW e HAZELL (1968) desenvolveram a aplicação de programação quadrática à agricultura. Posteriormente HAZELL (1971) reconhecendo as dificuldades da aplicação de método ele propôs o uso do MOTAD (Minimization of Total Absolute Deviation) que oferece a grande vantagem de usar programas enlatados convencionais de programação linear (P.L.).

O método é muito interessante e merece um destaque especial. Definamos A como o desvio da renda média absoluta:

$$(1) \quad A = \frac{1}{s} \sum_{h=1}^{s} \left| \sum_{j=1}^{n} (c_{hj} - g_j)\, x_j \right|$$

como um estimador não tendencioso do desvio da renda média absoluta da população, onde:

s = nº de observações numa amostragem aleatória de margens brutas.

g_j = média amostral das margens brutas de j atividades.

c_{hj} = margem bruta da h ésima observação da j ésima atividade;

(j=1 ...n) e (h=1 ...s)

x_j = o nível da j ésima atividade.

Usando-se A como medida de incerteza toma-se E, a média da margem bruta total, que juntamente com A são os parâmetros fundamentais na seleção de um programa de atividade de uma fazenda. Estas serão eficientes se tiverem o mínimo A para um dado E. O critério é portanto: Minimizar E-A, e a solução deste objetivo é obtida através de P.L. convencional com uma rotina paramétrica para a derivação de opções ("farm plans") eficientes. Na equação (1) vemos que $\frac{1}{s}$ é uma constante. Isto equivale a minizarmos sA.

Para isto define-se as seguintes variáveis:

$$Y_h = \sum_{j=1}^{n} c_{hj} x_j - \sum_{j=1}^{n} g_j x_j$$

para todos os h, (h=1 ... s)

tem-se então

Minimizar $$sA = \sum_{h=1}^{s} \left| Y_h \right|$$

Definindo-se

$$Y_h = Y_h + - y_h -$$

Sendo:

$$Y_h + = \left| \sum_{j=1}^{n} (c_{hj} - g_j) x_j \right|$$

quando $\sum_{j=1}^{n} (c_{hj} - g_j) x_j$ for positivo, e $y_h -$ quando for negativo.

Se $y_h +$ e $y_h -$ forem selecionados de uma forma tal que um ou outro seja zero teremos:

$$\left| y_h \right| = y_h + + y_h - \qquad (h=1 \ldots s)$$

O modelo tentará naturalmente a seleção dos x_j (j=1 ...n) que sujeita a um mínimo E-A maximizem a renda.

Tem-se que $\sum_{h=1}^{s} y_h +$ é a soma dos valores absolutos dos desvios positivos da margem bruta total em redor da média esperada, e $\sum_{h=1}^{s} y_h^-$ a soma negativa, ambos em termos de margens brutas médias amostrais.

Isto significa que $\sum_{h=1}^{s} y_h^+$ será igual a $\sum_{h=1}^{s} y_h^-$ caso g_j ($j=1 \ldots n$) sejam margens brutas médias amostrais. O modelo MOTAD proposto por Hazell teria então a seguinte formulação, baseada em minimizar somente a soma dos valores absolutos dos desvios negativos das margens brutas totais em torno da média (pois os desvios positivos são benéficos e não devem ser minimizados).

2) Minimizar $\frac{1}{2}\, sA = \sum_{h=1}^{s} y_h^-$

Tal que:

3) $\sum_{j=1}^{n} (c_{hj} - g_j)\, x_j + y_h^- \geqslant 0$

(para todos os h, h=1 ...s)

e

4) $\sum_{j=1}^{n} f_j\, x_j = \lambda$

5) $\Sigma a_{ij}\, x_j \leqslant b_i$ (todos os i, i=1 ...n)

6) $x_j,\ y_h^- \geqslant 0$ (todos os h e j)

f_j é a margem bruta prevista para cada atividade.

a_{ij} é o coeficiente técnico da matriz de tecnologia usual em P.L.

e os

b_i ($i=1 \ldots m$) são os níveis de fatores limitantes.

λ é o coeficiente de parametrização, crescendo a partir de zero até a solução máxima dada por P.L. convencional.

Como o modelo é paramétrico haverá um conjunto de soluções eficientes.

Cabe ao tomador de decisão a escolha da solução, de acordo com as suas preferências, pois esta depende da função utilidade de cada um, que é subjetiva.

Um exemplo com quatro culturas é dado por HAZELL (1971). Entretanto o exemplo mais interessante é dado por HOLANDA e SANDERS (1975) pois ali são tratadas as consorciações de Algodão com Sorgo, Milho e Feijão na região de Seridó-RN.

IV - MODELOS DE TEORIA DOS JOGOS COM PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA

Outra linha de raciocínio para incorporação de risco em modelos de planejamento da propriedade rural, é baseada na teoria dos jogos desenvolvida por VON NEUMANN e MORGENSTERN (1974).

Os interessados sobre detalhes poderão consultar uma vasta literatura disponível sobre teoria dos jogos, apresentada até mesmo em livros elementares de estatística como o WONNACOTT e WONNACOTT (1972). O que não são muito conhecidos são os métodos de usar teoria dos jogos para aplicações agrícolas, e por esta razão descrever-se-á o processo aqui.

O ponto inicial da análise é o critério de MAXIMIN (Máximo entre os Mínimos Ganhos) onde o tomador de decisão escolhe o melhor entre os piores resultados de cada alternativa. Para se melhor entender este critério, procurar-se-á explicar primeiro o que significa uma estratégia mista para aplicações agrícolas, onde é necessário combinar-se duas ou mais atividades A_i ($i=1 \ldots M$) para se maximizar o critério MAXIMIN:

i) O interesse do agricultor seria de escolher as proporções P_i (i=1 ...n) de recursos disponíveis (terra, capital, mão-de-obra, etc) que seriam alocados na produção das culturas (atividades) A_i durante o ano ou o período de planejamento.

ii) Dentro desta ótica o conceito de estratégia mista teria a interpretação acima e não aquela que é comumente apresentada na literatura de teoria dos jogos (McINERNEY (1967)).

Para a montagem do modelo MAXIMIN o agricultor teria m recursos disponíveis A_j e os estados na natureza s_j j=1 ...n seriam definidos como as condições de tempo que possivelmente afetariam a produção com iguais probabilidades de ocorrência. Teríamos também como parte integrante do modelo uma matriz de margens brutas $[c_{ij}]$ que representaria os retornos por hectare (ou outra unidade) que seriam resultantes da combinação de cada estado da natureza com cada atividade escolhida.

A estratégia do agricultor seria a de obter a melhor combinação das atividades da fazenda que lhe assegurem uma renda mínima garantida dentro da situação de incerteza que ele se defronta.

DANTZIG (1951) demonstrou que cada jogo de 2 pessoas-soma zero é formalmente equivalente a um problema de programação linear (P.L.) devidamente especificado. Isto significa que podemos usar os enlatados de P.L. na solução de problemas de maximin.

Tomemos o jogo Agricultor X Natureza no qual o primeiro tem m atividades de produção e a Natureza tem n possíveis estados (digamos n possíveis pré-fixados níveis de precipitação pluviométrica) durante o período de produção.

Portanto há uma matriz m X n de possíveis margens brutas. O que se deseja do modelo seria a determinação de uma proporção P_i para cada A_i de tal modo que a margem bruta total resultante nunca fosse menor que um valor mínimo V, qualquer que fosse o estado da natureza.

Queremos portanto determinar estes P_i que maximizam V (critério maximin).

Esta condição seria satisfeita na seguinte forma:

$$c_{11}p_1+c_{21}p_2+ \dots +c_{m1}p_m \geqslant V \qquad \text{se ocorrer } S_1$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$c_{1n}p_1+c_{2n}p_2+ \dots +c_{mn}p_m \geqslant V \qquad \text{se ocorrer } S_n$$

Com a condição de:

$$\sum_{i=1}^{M} p_i = 1$$

Para achar-se a função objetiva V para ser maximizada McInerney sugere que se usem variáveis mudas.

Para cada uma das n equações acima usar-se-ia uma nova variável $p_m + j$ de tal modo que cada inequação seja transformada em equação. O sistema de equações seria então:

$$c_{11}p_1+c_{21}p_2+ \dots +c_{m1}p_m - p_{m+1} = V \quad \text{para } S_1$$

$$c_{1n}p_1+c_{2n}p_2 \dots +c_{mn}p_m - p_{m+n} = V \quad \text{para } S_n$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

$$p_i \geqslant 0 \quad \text{(para todos os } i = 1 \dots m+n)$$

Subtraindo-se a primeira equação no sistema acima sucessivamente de cada uma das equações seguintes, eliminar-se-ia as incógnitas V com exceção da primeira equação restante.

Esta é portanto a nossa função objetivo. Teríamos portanto o seguin

elo:

zar: $$V = \sum_{i=1}^{m+n} c_{i1} p_i$$

Sujeito as seguintes n-1 relações:

$$\sum_{i=1}^{m+n} c_{ij} p_i = 0$$

e

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$$

$p_i \geqslant 0$ (para todos i=1 ...m+n)

Ter-se-ia que incluir também as restrições de disponibilidade de recursos, normais à qualquer problema de P.L.

O modelo completo é portanto assim especificado:

Maximizar: $$V = \sum_{i=1}^{m+n} c_{i1} p_i$$

Sujeito à n - 1 restrições (maximin)

$$\sum_{i=1}^{m+n} a_{ij} p_i = 0$$

bem como à r restrições (disponibilidade de recursos)

$$\Sigma\, d_{ik}\, p_i \leqslant b_k$$

$$\sum_{i=1}^{m} p_i \leqq L \qquad (i=1 \ldots m)$$

$$p_i \geqslant 0$$

Na especificação acima define-se as atividades em termos de hectares. Com isto o nível destas atividades obtido pela solução do modelo (as proporções p_i) medirá a proporção da área total da fazenda que será alocada a cada atividade. Daí a razão da inclusão de

$$\sum_{i=1}^{m} p_i \leq L$$

Onde L é a área total da propriedade (ou área cultivável) e os p_i são expressos agora em termos de área a ser alocada a cada atividade (ou as outras unidades normalmente incluídas em P.L. relativas à parte da pecuária, etc).

Na coleta de dados para a alimentação do modelo, Mc Inerney usa uma série de 5 anos e cada ano refletiria um estado da natureza.

A matriz de margens brutas seria:

ATIVIDADES	ESTADOS NATUREZA	I	II	III	IV	V	MÉDIA
A_1		c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}	c_{15}	$\frac{1}{5} \sum_{j=1}^{5} c_{ij}$
A_2		⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
.							
.							
.							
A_m		c_{m1}	c_{m2}	c_{m3}	c_{m4}	c_{m5}	$\frac{1}{5} \sum_{j=1}^{5} c_{mj}$

Nem sempre será possível a obtenção das margens brutas em cada cultura por um período de 5 anos. Neste caso uma alternativa seria a de se obter as margens brutas para cada estado da natureza através de entrevistas com os produtores os quais através de sua experiência poderiam dar uma idéia das margens brutas de cada cultura sob condições de vários tipos de clima.

A comparação dos resultados do modelo maximin com as da P.L. convencional é facilmente obtida através do uso da última coluna (MÉDIA) da tabela acima. Os dados desta coluna alimentariam, como é sabido, o modelo de P.L. convencional.

Enquanto o modelo de P.L. comum maximiza a margem bruta presumindo certeza (isto é, ela não prevê o que acontece com o agricultor caso have um ano ruim), o modelo maximin assegura um máximo entre o mínimo de ganhos que o agricultor enfrentaria.

Se o agricultor estiver interessado em <u>maximizar o lucro</u> no período considerado (seja 5 anos) e estiver preparado para suportar as consequências dos anos ruins então o modelo convencional de P.L. é o mais indicado. O modelo de maximin seria factível para o agricultor que não pode dar-se ao luxo de tolerar as consequências dos anos de baixo retorno, ou prejuízos.

Há entretanto um grave inconveniente com o uso do modelo maximin. É que a especificação dos estados da natureza é totalmente arbitrária, e o modelo depende crucialmente desta especificação. As margens brutas de 3 estados da natureza poderão gerar soluções bem diferentes daquelas resultantes de 8 estados, por exemplo.

V - ESCOLHA DE UM MODELO DE RISCO

Para fins práticos a escolha de um modelo de risco depende da disponibilidade dos dados, dos objetivos a que se pretende chegar, e dos recursos disponíveis. Os exemplos empíricos apresentados a seguir ilustram estes pontos. Para aplicações que envolvem comparações de alternativas isoladas duas a duas, dispõe o DDM-EMBRAPA de pacotes já implantados no computador (ex. DA CRUZ (1980) Para aplicações que envolvem a propriedade rural como um todo, o único enlatado disponível no momento é o MPSX, devendo a matriz de programação correspondente ser feita individualmente, para atender as necessidades de cada caso. Oportunamente o DDM colocará à disposição dos usuários uma versão do PROFAZENDA que incorpora risco.

LITERATURA CITADA

ANDERSON, J.R. "Risk Aversion and Polynomial Preference", Australian Economic Papers, Vol. 12, nº 21, pp. 261-262, 1973.

ANDERSON, J.R. "Risk Efficiency in the Interpretation of Agricultural Production Research", Review of Marketing and Agricultural Economics (September), Vol. 42 nº 3, pp. 131-184, 1974.

ANDERSON, J.R., DILLON, J.L. and HARDAKER, J.B. "Agricultural Decision Analysis", Ames: Iowa State University Press. 1977.

BAUMOL, W.J. "An Expected Gain - Confidence Limit Criterion for Portfolio Selection", Management Science, Vol. 10, nº 1, pp. 174-182, 1963.

BITZ, M. and ROGUSCH, M. "Risiko-Nutzen, Geldnutzen un Risikoeinstellung Zur Discussion um das Bernoulli-Prinzip" Zeitschrift für Betriebswirtschaft, Vol. 46, nº 12, pp. 853-868, 1976.

BORCH, K. "Economics of Uncertainty", Princepton: Princepton University Press. 1968.

BOUSSARD, J.M. and PETIT, M. "Representation of Farmers' Behaviour under Uncertainty with a focus-loss Constraint", Journal of Farm Economics, Vol. 49, nº 4, pp. 869-880, 1967.

CROCOMO, C.R. "Risk Efficient Fertilizer Rates: An Application to corn Productior in the Cerrado Region of Brazil". Tese de Ph.D. Michigan State University, 197[illegible]

DANTZIG, G.B. "A Proof of Equivalence of the Programming Problem and the Game Problem". Em T.C. KOOPMANS (Ed.) Activity Analysis of Production and Allocation - WILEY, 1951.

DA CRUZ, E.R. "On the Determination of Priorities for Agricultural Research under Risk". Wye College, University of London. (Tese de Ph.D.), 1979.

DA CRUZ, E.R. "PACTA - Programa de Avaliação Comparativa de Tecnologias Alternativas - Guia do Usuário", EMBRAPA-DDM, Mimeo, 7p., 1980.

DILLON, J.L. "An Expository Review of Bernoullian Decision Theory" Review of Marketing and Agricultural Economics, Vol. 39, nº 1 (March), pp. 1-80, 1971.

DILLON, J.L. and SCANDIZZO, P.L. "Risk Attitudes of Subsistence Farmers in North East Brazil: A Sampling Approach", American Journal of Agricultural Economics,. Vol. 60, nº 3 (August), pp. 425-435, 1978.

FELDSTEIN, M.S. "Mean Variance Analysis in the Theory of Liquidity Preference and Portfolio Selection", Review of Economic Studies, Vol. 36, nº 1, pp. 5-14, 1969.

FONSECA, V.H. e DA CRUZ, E.R. "Metodologia para Incorporação de Risco em Modelos de Decisão: O caso do Arroz no R.G. do Sul". Trabalho apresentado no 18º Congresso da SOBER, Recife, 1981.

FREUND, R.J. "The Introduction of Risk into a Programming Model", Econometrica, Vol. 24, nº 3, pp. 253-263, 1956.

GARCIA, J.C. & CRUZ, J.C. "Seleção pela dominância estocástica, de práticas agrícolas eficientes com respeito ao Risco - uma aplicação para a cultura de milho". Revista de Economia Rural, Brasília, 17(2): 131-142, 1979.

HADAR, J. and RUSSEL, W.R. "Rules for Ordering Uncertain Prospects" American Economic Review, March, Vol. 14, nº 1, pp. 25-34, 1969.

HANNOCH, G. and LEVY, H. "Efficient Portfolio Selection with Quadratic and Cubic Utility", Journal of business, Vol. 43, nº 2, pp. 181-189, 1970.

HAZELL, P.B.R. "A Linear Alternative to Quadratic and Semi-Variance Programming for Farm Planning under Uncertainty". A.J.A.E. - Vol. 53, Nº 1, pp. 53-62, Fevereiro, 1971.

HOLANDA, A.N. e SANDERS, J.H. Evaluating the Introduction of New Technology for Small and Medium Farmers under Very Risky Conditions: The Seridó of Rio Grande do Norte - Sumário da Tese de M.S. a ser apresentada na U. F. Ceará - 1975.

HOW, R.B. e HAZELL, P.B.R. Use of Quadratic Programming in Farm Planning under Uncertainty. A. E. RES. 250. Dept. Agric. Econ. - CORNELL, 1968.

KATAOKA, S. "A Stochastic Programming Model", Econometrica, Vol. 31, nº 1-2, pp. 181-196, 1963.

KNIGHT, F.H. Risk, Uncertainty and Profit - Boston: Houghton - Miffilin, 1921.

KOCH, H. "Die Problematik der Bernoulli-Nutzentheorie", Jahrbüch für Nationalökonomie und Statistik, Vol. 188, pp. 193-223, 1974.

MARKOWITZ, H. "Portfolio Selection - Efficient Diversification of Investiments". Wiley, New York, 1959.

McINERNEY, J.P. "Maximin Programming - An Approach to Farm Planning under Unvertainty", Journal of Agricultural Economics, Vol. 18, nº 2, pp. 279-289, 1967.

McINERNEY, J.P. Linear programming and game theory models - some extensions, Journal of Agricultural Economics, 20(2): 269-278, 1969.

MEYER, J. "Choice Among Distributions". Journal of Economic Theory, Vol. 14, pp. 326-36, 1977.

QUIRK, J.P. and SAPOSNIK, R. "Admissibility and Measurable Utility Functions", Review of Economic Studies, Vol. 29, nº 1, pp. 140-146, 1962.

ROUMASSET, J. "Rice and Risk: Decision Making among Low-Income Farmers", North Holland, Amsterdam, 1976.

ROY, A.D. "Safety First and the Holding of Assets", Econometrica, Vol. 20, nº 3, pp. 431-449, 1952.

TELSER, L.G. "Safety First and Hedging", Review of Economic Studies, Vol. 23, nº 1, pp. 1-16, 1955.

TOBIN, J. "Liquidity Preference as Behaviour Towards Risk", Review of Economic Studies, Vol. 25, nº 1, pp. 65-85, 1958.

TSIANG, S.C. "The Rationale of the Mean Standard Deviation analysis, Skewness Preference, and the Demand for Money", American Economic Review, Vol. 62, pp. 354-371, 1972.

VON NEUMANN, J. e O. MORGENSTERN. Theory of Games and Economic Behaviour - Princepton U.P. - 2a. Ed., 1947.

WEBSTER, J.P.G. and KENNEDY, J.O.S. "Measuring Farmers' Trade-Offs between Expected Income and Focus-loss Income", American Journal of Agricultural Economics, Vol. 57, nº 1, pp. 97-105, 1975.

WIENS, T.B. "Peasant Risk Aversion and Allocation Behaviour: A Quadratic Programming Experient", American Journal of Agricultural Economics, (November), pp. 629-635, 1976.

WONNACOTT e WONNACOTT. Introductory Statistics - Wiley, 2a. Ed., 1972.