

Nota Científica

Modelos de distribuição de diâmetros utilizando a função log gama

Daniel Henrique Breda Binoti¹, Mayra Luiza Marques da Silva Binoti², Helio Garcia Leite¹, Antonilmar Silva³

¹Universidade Federal de Viçosa, Departamento de Engenharia Florestal, Avenida P. H. Rolfs, s/nº, CEP 36570-000, Viçosa, MG, Brasil

²Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri, Departamento de Engenharia Florestal, Rodovia MG 367, nº 5000, Alto do Jacuba, CEP 39100-000, Diamantina, MG, Brasil

³Cenibra, Rodovia BR 381, km 172, CP 100, Distrito de Perpétuo Socorro, CEP 35196-000, Belo Oriente, MG, Brasil

*Autor correspondente:
danielhbbinoti@gmail.com

Termos para indexação:

Weibull
Função densidade de probabilidade
Eucalyptus

Index terms:

Weibull
Probability density functions
Eucalyptus

Histórico do artigo:

Recebido em 11/04/2012
Aprovado em 21/02/2013
Publicado em 31/03/2013
doi: 10.4336/2013.pfb.33.73.387

Resumo - Objetivou-se neste estudo avaliar a eficiência da função log gama para a descrição da estrutura diamétrica de povoamentos equiâneos, bem como propor um modelo de distribuição diamétrica utilizando esta função. A função foi ajustada a dados de parcelas permanentes de inventário, mensuradas em seis idades. A aderência da função aos dados foi comprovada pelo teste Kolmogorov-Smirnov. A análise gráfica de resíduos não apresentou tendenciosidade para os modelos construídos. A função log gama pode ser utilizada para a construção de modelos de distribuição diamétrica de eucalipto.

Use of log gamma function for modeling diametric distribution

Abstract - The objective of this study was to evaluate the efficiency of the log-gamma function to describe the diameter structure of even-aged stands and propose a diametric distribution model using the function. The function was fitted to data from permanent plot inventory, measured at six different ages. The function's adherence to the data was confirmed by the Kolmogorov-Smirnov test. The graphical analysis of residuals showed no bias for the models built. The log gamma function can be used to build models of the diameter distribution of eucalyptus.

Introdução

A tomada de decisão para os gestores florestais exige o conhecimento sobre a estrutura diamétrica do povoamento florestal. Na prática, o conhecimento da estrutura diamétrica permite a quantificação do volume total e por sortimentos, estimação consistente dos custos de colheita, inferências sobre o estágio de desenvolvimento do povoamento, previsão de rendimentos futuros do povoamento e a simulação

consistente de regimes de corte (Campos & Leite, 2009).

A descrição da estrutura diamétrica é realizada por funções densidade de probabilidade (fdp). Diversas fdp foram utilizadas para a descrição da distribuição de diâmetros de povoamentos equiâneos, destacando-se as funções Weibull, normal, log-normal, gama, Johnson's SB, beta, log-logística, Cauchy, Frechet, Erlang, Rayleigh e hiperbólica (Binoti, 2008; Leite et al., 2010; Binoti et al., 2011).

A precisão das estimativas por classe de diâmetro é determinada pela escolha da fdp que melhor descreva os dados observados. Contudo, além de apresentar uma boa aderência à estrutura diamétrica, a fdp escolhida deve apresentar correlação significativa com parâmetros do povoamento, permitindo a recuperação de seus parâmetros em idades futuras. Esses fatos justificam a constante introdução e avaliação de fdp para a descrição e construção de modelos de distribuição de diâmetros de plantios equiâneos.

Diversos estudos são encontrados na literatura utilizando a função log gama com aplicações em diversas áreas (Prentice, 1974; Lawless, 1980; Young & Bakir, 1987; Balakrishnan & Chan, 1998), contudo, não se encontrou estudos utilizando a função para a descrição da estrutura diamétrica de povoamentos de eucalipto. Dissemos que uma variável aleatória X apresenta distribuição log gama se sua função densidade de probabilidade apresenta a seguinte forma (Chan, 1993):

$$f(x) = \frac{(\ln(x))^{\alpha-1}}{x\beta^\alpha\Gamma(\alpha)} e^{\left(-\frac{\ln(x)}{\beta}\right)} \quad (1)$$

em que α e β são parâmetros contínuos, sendo ambos positivos, $\Gamma()$ é a função gama.

A função acumulativa da função log gama, pode ser expressa como:

$$F(x) = \frac{\int_0^x \ln(t)^{\alpha-1} e^{-\frac{\ln(t)}{\beta}} dt}{\Gamma(\alpha)} \quad (2)$$

Objetivou-se neste estudo avaliar a eficiência da função log gama para a descrição da estrutura diamétrica de povoamentos equiâneos, bem como propor um modelo de distribuição diamétrica utilizando a função.

Neste estudo utilizaram-se dados obtidos de 400 parcelas retangulares permanentes de 340 m², instaladas em povoamentos de híbridos de *Eucalyptus grandis* x *Eucalyptus urophylla*, na região Centro Oeste do Estado de Minas Gerais, Brasil. Esses povoamentos foram estabelecidos sob arranjo espacial de 3 x 3 m, com rotação de corte média de 7 anos. As medições de diâmetros foram efetuadas nas árvores com diâmetro à 1,3 m de altura (*dap*) acima de 5 cm, nas idades médias de 28, 40, 52, 64, 76 e 84 meses. As principais características dos dados são apresentadas na tabela 1.

A função log gama foi ajustada a todas as parcelas e medições. Para fins comparativos, ajustou-se a função Weibull de 2 parâmetros, que é apresentada a seguir:

$$f(x) = \frac{\gamma}{\beta} \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\gamma-1} e^{\left(-\left(\frac{x}{\beta}\right)^\gamma\right)}$$

em que β é o parâmetro de escala ($\beta > 0$) e γ é o parâmetro de forma ($\gamma > 0$).

Os dados de *dap* observados em cada parcela e medição foram agrupados em classe com amplitude de 1,0 cm. Os ajustes foram feitos em planilha eletrônica pelo método da máxima verossimilhança com auxílio de técnicas de *Visual Basic for Applications*. A aderência das funções aos dados foi comprovada pelo teste Kolmogorov-Smirnov (K-S) (Sokal & Rohlf, 1981). Realizou-se a análise gráfica entre valores estimados e observados para todos os ajustes obtidos com as funções testadas.

A construção do modelo de distribuição diamétrica baseou-se na correlação dos parâmetros da função log gama com características do povoamento. O sistema de equações utilizado para a projeção dos parâmetros da função Weibull foi obtido no trabalho de Nogueira et

Tabela 1. Principais características do povoamento estudado.

Idade média (meses)	Altura dominante (m)	Altura média (m)	Diâmetro médio (cm)	Diâmetro máximo (cm)	Área basal média (m ² ha ⁻¹)
12	13,39	12,66	9,74	11,46	0,01
24	17,60	16,50	12,13	14,45	3,37
36	21,24	19,61	13,76	16,87	6,24
48	24,32	22,06	14,88	18,76	9,56
60	26,62	23,63	15,62	20,37	11,44
72	28,54	24,60	16,04	21,92	12,23
84	30,13	25,23	16,21	23,37	12,80

al. (2005). Como variáveis dependentes utilizaram-se os parâmetros da função em uma idade futura e como variáveis independentes utilizaram-se as características facilmente mensuráveis do povoamento como idade atual e futura, diâmetro médio atual e futuro, diâmetro máximo atual e futuro, número de árvores atual e futuro, bem como os parâmetros da função em uma idade atual (Binoti et al., 2011).

A eficiência dos modelos de distribuição de diâmetros foi avaliada pela capacidade do sistema de equações em projetar as características do povoamento como diâmetro máximo, o número total de árvores e os parâmetros da função log gama e Weibull para qualquer idade. O coeficiente de correlação entre os valores observados e estimados e a análise gráfica dos resíduos e o histograma de resíduos foram utilizados para avaliar a exatidão das estimativas do sistema de equações. A correlação entre os valores estimados e observados dos parâmetros projetados foi calculada da seguinte forma:

$$r_{\hat{Y}} = \frac{\text{cov}(Y, \hat{Y})}{\sqrt{s^2(Y)s^2(\hat{Y})}}$$

em que, s^2 é a variância e cov é a covariância.

As funções Weibull e log gama foram ajustadas a cada parcela e em cada situação, sendo totalizados 2.400 ajustes. Em cada ajuste os valores estimados foram comparados com a distribuição observada. Na figura 1 são apresentados os ajustes das duas funções para 4 parcelas escolhidas aleatoriamente.

Todos os ajustes resultaram em aderência aos dados pelo teste Kolmogorov-Smirnov ($P > 0,01$). Os valores médios da estatística do teste Kolmogorov-Smirnov foram de 0,1722 para a função log gama e de 0,1043 para função Weibull.

Os modelos de distribuição diamétrica ajustados com seus respectivos coeficientes de correlação são:

Log gama:

$$\alpha_2 = \alpha_1 0,1074 \left(\frac{I_1}{I_2} \right) + 2,3145 \beta_2^{-1,0109} \quad R_{\hat{Y}} = 0,9989$$

$$\beta_2 = \beta_1 e^{(-7,0876(I_2^{-0,7693} - I_1^{-0,7693}))} \quad R_{\hat{Y}} = 0,9891$$

Weibull:

$$\beta_2 = \beta_1 - 68,5874(I_2^{-0,4013} - I_1^{-0,4013}) \quad R_{\hat{Y}} = 0,9643$$

$$\ln \gamma_2 = \ln \gamma_1 - 5,6530(I_2^{0,0479} - I_1^{0,0479}) \quad R_{\hat{Y}} = 0,9813$$

em que, I_1 e I_2 são as idades atual e futura, respectivamente, em meses; α_1 e α_2 são os parâmetros de forma da função log gama nas idades atual e futura; γ_1 e γ_2 são os parâmetros de forma da função Weibull nas idades atual e futura; β_1 e β_2 são os parâmetros de escala das funções log gama e Weibull nas idades atual e futura.

A dispersão gráfica dos resíduos percentuais e os histogramas da dispersão dos erros para cada equação que compõe o sistema são apresentados na Figura 2.

A função Weibull tem sido usada com sucesso por diversos autores para modelagem de distribuições de diâmetros (Bailey & Dell, 1973; Cohen, 1982; Gove & Patil, 1998; Kangas & Maltamo, 2000; Cao, 2004; Nogueira et al., 2005; Campos & Leite, 2009; Abbasi et al., 2006). As justificativas para o uso desta função são a sua flexibilidade e a correlação significativa normalmente encontrada entre seus parâmetros e características dos povoamentos, como o diâmetro médio quadrático e o diâmetro máximo.

Os valores do teste de aderência comprovam a superioridade da função Weibull em descrever os dados do estudo. Este fato é comprovado também na análise gráfica demonstrada na figura 1. Pode-se observar que a função apresenta uma assimetria à esquerda bem evidente, o que pode ser benéfico em um modelo com simulações de desbaste. Contudo, este fato deve ser comprovado em trabalhos específicos.

O modelo de projeção dos parâmetros da função Weibull apresentou menores valores de coeficiente de correlação, apesar de demonstrar uma menor dispersão gráfica dos resíduos. Contudo, a análise gráfica de ambas as equações propostas para as funções apresentam bom desempenho para a recuperação dos parâmetros em idades futuras. Somente as variáveis independentes, idade atual e futura e o valor do parâmetro de interesse em uma idade atual, foram utilizados para a projeção dos parâmetros das funções Weibull e Log gama.

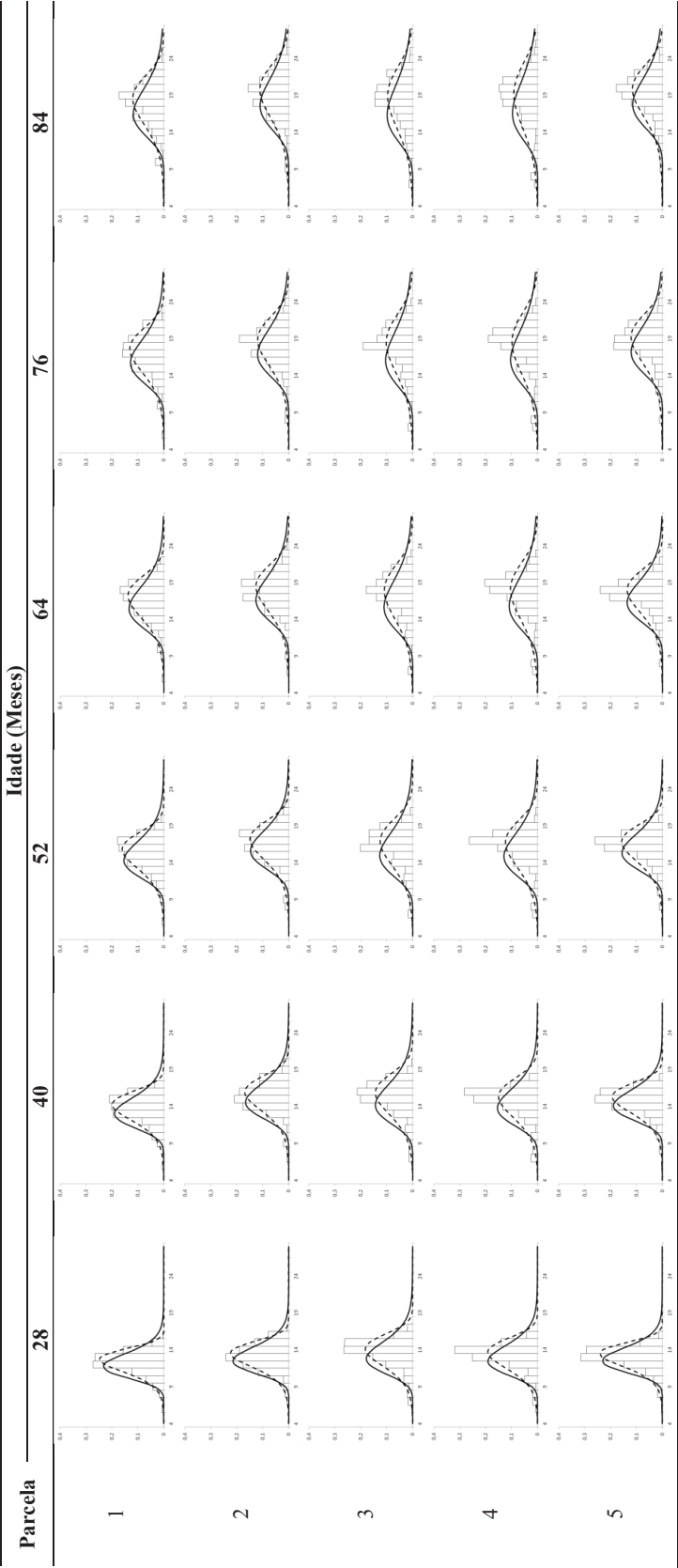


Figura 1. Frequência observada (barras) e estimada pela função log gamma (-) e Weibull (--) para povoamentos equiâneos de eucalipto em diferentes idades. O eixo das ordenadas representa a probabilidade e no eixo das abcissas a classe de diâmetro

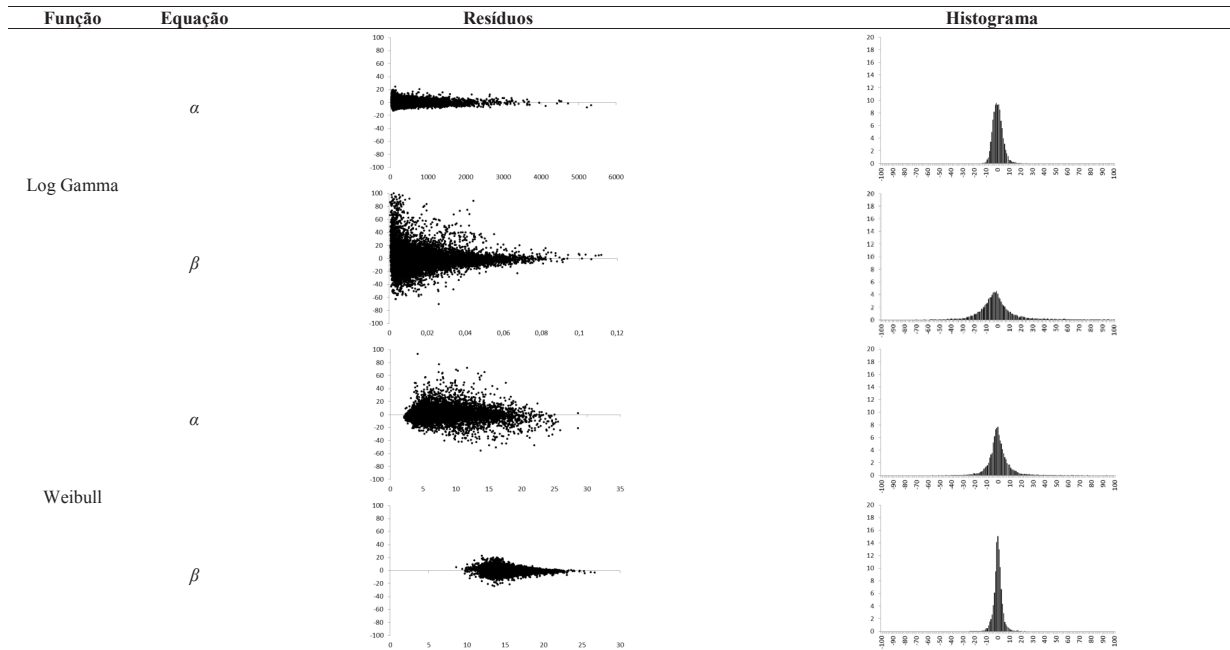


Figura 2. Dispersão de resíduos (%) em função do valor observado e histograma da distribuição percentual dos resíduos em função da classe de erro para as equações que compõe o modelo de distribuição de diâmetros.

A função log gama pode ser utilizada para a construção de modelos de distribuição de diâmetros em plantios não desbastados de eucalipto.

Referências

- ABBASI, B.; JAHROMIA, A. H. E.; ARKAT, J.; HOSSEINKOUCHACK, M. Estimating the parameters of Weibull distribution using simulated annealing algorithm. **Applied Mathematics and Computation**, New York, v. 183, p. 85–93, 2006.
- BAILEY, R. L.; DELL, T. R. Quantifying diameter distributions with the Weibull function. **Forest Science**, Lawrence, v. 19, n. 2, p. 97–104, 1973.
- BALAKRISHNAN, N.; CHAN, P. S. Log-gamma order statistics and linear estimation of parameters. In: BALAKRISHNAN, N. R. (Ed.). **Handbook of statistics 17: order statistics and their applications**. Amsterdam: Elsevier Science, 1998. p. 61–83.
- BINOTI, D. H. B. **Funções densidade de probabilidade para a descrição da distribuição diamétrica de povoamentos desbastados de *Tectona grandis***. 2008. 42 f. Monografia (Graduação em Engenharia Florestal) - Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, MG.
- BINOTI, D. H. B.; BINOTI, M. L. M. S.; LEITE, H. G.; GARCIA, S. L. R.; CRUZ, J. P. Modelos de distribuição diamétrica para povoamentos desbastados de eucalipto utilizando a função hiperbólica. **Revista Árvore**, Viçosa, MG, v. 35, n. 5, 2011.
- CAMPOS, J. C. C.; LEITE, H. G. **Mensuração florestal: perguntas e respostas**. 3. ed. Viçosa, MG: Ed. da UFV, 2009. 548 p.
- CAO, Q. V. Predicting parameters of a Weibull function for modeling diameter distribution. **Forest Science**, Lawrence, v. 50, n. 4, p. 682–685, 2004.
- CHAN, P. S. **A statistical study of log-gamma distribution**. 1993. 370 f. Thesis (Doctor of Philosophy) – McMaster University, Ontario.
- COHEN, W. Modified maximum likelihood and modified moment estimators for the three-parameter Weibull distribution. **Communications in Statistics-Theory and Methods**. v. 11, n. 23, p. 2631–2656, 1982.
- GOVE, J. H.; PATIL, G. P. Modelling basal area size distribution of forest stands: a compatible approach. **Forest Science**, Lawrence, v. 44, n. 2, p. 285–297, 1998.
- KANGAS, A.; MALTAMO, M. Calibrating predicted diameter distribution with additional information. **Forest Science**, Lawrence, v. 46, n. 3, p. 390–396, 2000.
- LAWLESS, J. F. Inference in the generalized gamma and log-gamma distribution. **Technometrics**, v. 22, p. 67–82, 1980.
- LEITE, H. G.; BINOTI, D. H. B.; GUIMARÃES, D. P.; SILVA, M. L. M.; GARCIA, S. L. R. Avaliação do ajuste das funções Weibull e hiperbólica a dados de povoamentos de eucalipto submetidos a desbaste. **Revista Árvore**, Viçosa, MG, v. 34, n. 2, p. 305–311, 2010.
- NOGUEIRA, G. S.; LEITE, H. G.; CAMPOS, J. C. C.; CARVALHO, A. F.; SOUZA, A. L. de. Modelo de distribuição diamétrica para povoamentos de *Eucalyptus* sp. submetidos a desbaste. **Revista Árvore**, Viçosa, MG, v. 29, n. 4, p. 579–589, 2005.
- PRENTICE, R. L. A log-gamma model and its maximum likelihood estimation. **Biometrika**, London, v. 61, p. 539–544, 1974.
- SOKAL, R. R.; ROHLF, F. J. **Biometry**. San Francisco: Freeman, 1981.
- YOUNG, D. H.; BAKIR, S. T. Bias correction for a generalized log-gamma regression model. **Technometrics**, v. 29, p. 183–191, 1987.