EXEMPLOS DE FÀTORIAIS FRACIONADOS $(1/2)4^3$ E $(1/4)4^4$ PARA O AJUSTE DE MODELOS POLINOMIAIS QUADRÁTICOS[1]

DALTON F. DE ANDRADE[2] e ANTONIO Q. NOLETO[3]

RESUMO - Neste trabalho são apresentados dois exemplos de fatoriais fracionados $(1/2)4^3$ e $(1/4)4^4$ com os quais os coeficientes dos efeitos lineares, quadráticos e das interações linear x linear podem ser estimados independentemente uns dos outros quando usamos um modelo polinomial quadrático para representar a superfície de resposta. Também mostra-se como estes esquemas fatoriais podem ser usados em delineamentos em blocos, de modo que os efeitos de interesse não fiquem confundidos com os efeitos de blocos.

EXAMPLES OF FRACTIONAL REPLICATIONS $(1/2)4^3$ AND $(1/4)4^4$ FOR FITTING QUADRATIC POLINOMIAL MODELS

ABSTRACT - In this work two examples of fractional replications $(1/2)4^3$ and $(1/4)4^4$ are presented, which allow the coefficients of the linear, quadratic and linear x linear interaction effects to be independently estimated from each other, whenever a quadratic polynomial model is used to present the response surface. It is also shown how these factorial schemes can be used in block designs so that the effects of interest be not confounded with block effects.

Vários autores têm sugerido os mais variados esquemas de se combinar os níveis de diferentes fatores para o ajuste de modelos que representem superfícies de resposta.

De modo geral, estes esquemas são baseados no esquema fatorial, ou seja, eles são fatoriais completos nos casos de poucos fatores com poucos níveis, ou fatoriais fracionados ou variações deste esquema nos casos de muitos fatores e/ou muitos níveis. Para representar a superfície de resposta, o modelo polinomial quadrático apresentado abaixo tem sido, sem dúvida alguma, o mais recomendado. No caso de se ter m fatores, ele pode ser descrito como

$$Y_j = P_0 + P_1 LX_{1j} + P_2 LX_{2j} + \dots + P_m LX_{mj}$$

$$+ P_{m+1} QX_{1j} + P_{m+2} QX_{2j} + \dots + P_{2m} QX_{mj} \qquad (1)$$

$$+ P_{2m+1} LX_{1j} LX_{2j} + \dots + P_{3m-1} LX_{1j} LX_{mj} + \dots + P_{m(m+3)/2} LX_{m-1,j} LX_{mj},$$

$j = 1, 2, \dots, n$, onde a variável X_i, $i = 1, 2, \dots, m$, está associada ao i-ésimo fator e LX_{ij} e QX_{ij} são polinômios de 1º e 2º graus em X_i, respectivamente, satisfazendo

---

[1] Aceito para publicação em 13 de março de 1986.

[2] Matemático, M.Sc., Ph.D., EMBRAPA/Núcleo Tecnológico para Pesquisa Agropecuária - NTIA, Rod. SP 340, km 105,4, CEP 13081 Campinas, SP.

[3] Estatístico – EMBRAPA/DMQ.

$$\sum_{j=1}^{n} Lx_{ij} = \sum_{j=1}^{n} Qx_{ij} = \sum_{j=1}^{n} Lx_{ij}\, Qx_{ij} = 0 \qquad (2)$$

para todo $i = 1, 2, \ldots, m$.

Estes polinômios são chamados de polinômios ortogonais. A vantagem de se expressar o modelo polinomial quadrático em termos de Lx_i e Qx_i, e não em termos de X_i e X_i^2, é que esta forma permite se estudar com mais detalhes a natureza da superfície de resposta ajustada.

Para que este estudo possa ser feito de uma forma mais eficiente – por ex.: para que as somas de quadrados na análise de variância, correspondentes aos efeitos introduzidos no modelo (1), possam ser obtidas independentemente uma das outras –, é necessário que os parâmetros P_ℓ, $\ell = 0, 1, 2, \ldots, m(m+3)/2$, possam ser estimados independentemente um dos outros. Para que isto aconteça, os polinômios Lx_i e Qx_i precisam satisfazer (2) e

$$\sum_{j=1}^{n} Lx_{ij}\, Lx_{kj} = \sum_{j=1}^{n} Lx_{ij}\, Qx_{kj} = \sum_{j=1}^{n} Qx_{ij}\, Qx_{kj} = 0 \qquad (3)$$

para todo $i, k\ (i \neq k) = 1, 2, \ldots, m$,

$$\sum_{j=1}^{n} Lx_{rj}\, (Lx_{ij}\, Lx_{kj}) = \sum_{j=1}^{n} Qx_{rj}\, (Lx_{ij}\, Lx_{kj}) = 0 \qquad (4)$$

para todo $r, i, k\ (i \neq k) = 1, 2, \ldots, m$,

e

$$\sum_{j=1}^{n} (Lx_{ij}\, Lx_{kj})\, (Lx_{rj}\, Lx_{sj}) = 0 \qquad (5)$$

para todo $i, k\ (i \neq k), r, s, (r \neq s) = 1, 2, \ldots, m$, com $i \neq r$ e/ou $k \neq s$.

O uso de todas as combinações dos níveis dos fatores (fatorial completo) faz com que (2) - (5) sejam satisfeitas, o que já não ocorre com muitos dos esquemas que envolvem repetições fracionadas. Por exemplo, em Conagin & Jorge (1977), as equações (4) e (5) não são satisfeitas, ao passo que em Colwell (1978, delineamento 12) somente (5) não é satisfeita.

Como o sistema de equações gerado por (2) - (5) é, em geral, de solução muito difícil, a construção de esquemas fatoriais através do uso destas equações não é recomendável. Outra alternativa, que foi utilizada pelos autores, é gerar uma série de esquemas fatoriais através do uso de técnicas de confundimento (Cochran & Cox 1957), e verificar quais são os que satisfazem (2) - (5). Para este fim, foi elaborado um programa que permite até sete fatores com qualquer número de níveis, e se encontra implementado no computador central da EMBRAPA.

Apresentam-se dois exemplos de fatoriais fracionados que satisfazem (2) - (5). Estes esquemas fatoriais foram desenvolvidos para serem usados por um grupo de pesquisadores do Sistema Cooperativo de Pesquisa Agropecuária, o qual pretende iniciar uma rede de experimentos para estudar o problema da fertilidade dos solos de cerrados.

Exemplo 1: $(1/2)4^3$ (três fatores com quatro níveis cada)

X_1	X_2	X_3	X_1	X_2	X_3
0	0	0	0	0	3
0	1	1	0	1	2
0	2	2	0	2	1
0	3	3	0	3	0
1	0	1	1	0	2
1	1	0	1	2	0
1	2	3	1	1	3
1	3	2	1	3	1
2	0	2	2	0	1
2	1	3	2	1	0
2	2	0	2	2	3
2	3	1	2	3	2
3	0	3	3	0	0
3	1	2	3	1	1
3	2	1	3	2	2
3	3	0	3	3	3

Estes 32 tratamentos podem ser usados tanto em um delineamento completamente casualizado quanto em um delineamento em blocos ao acaso. Neste último caso, devemos ter dois blocos com 16 parcelas cada, de modo a distribuir os tratamentos em dois grupos de 16, conforme divisão dada acima.

Exemplo 2: $(1/4)4^4$ (quatro fatores com quatro níveis cada)

X_1	X_2	X_3	X_4	X_1	X_2	X_3	X_4	X_1	X_2	X_3	X_4	X_1	X_2	X_3	X_4
0	0	0	0	0	0	3	2	0	0	1	3	0	0	2	1
0	1	3	1	0	1	0	3	0	1	2	2	0	1	1	0
0	2	1	2	0	2	2	0	0	2	0	1	0	2	3	3
0	3	2	3	0	3	1	1	0	3	3	0	0	3	0	2
1	0	1	1	1	0	2	3	1	0	0	2	1	0	3	0
1	1	2	0	1	1	1	2	1	1	3	3	1	1	0	1
1	2	0	3	1	2	3	1	1	2	1	0	1	2	2	2
1	3	3	2	1	3	0	0	1	3	2	1	1	3	1	3
2	0	2	2	2	0	1	0	2	0	3	1	2	0	0	3
2	1	1	3	2	1	2	1	2	1	0	0	2	1	3	2
2	2	3	0	2	2	0	2	2	2	2	3	2	2	1	1
2	3	0	1	2	3	3	3	2	3	1	2	2	3	2	0
3	0	3	3	3	0	0	1	3	0	2	0	3	0	1	2
3	1	0	2	3	1	3	0	3	1	1	1	3	1	2	3
3	2	2	1	3	2	1	3	3	2	3	2	3	2	0	0
3	3	1	0	3	3	2	2	3	3	0	3	3	3	3	1

Como no exemplo 1, estes 64 tratamentos também podem ser usados em um delineamento em blocos casualizados. Neste caso, devemos ter quatro blocos com 16 parcelas cada, de modo a distribuir os tratamentos em quatro grupos de 16, conforme divisão acima.

Nos casos onde blocos casualizados são considerados, novos termos associados ao efeito de blocos devem ser acrescentados ao modelo dado por (1) (Colwell 1978).

Em ambos os esquemas, os efeitos de interesse não estão confundidos com os efeitos de bloco. Vale a pena ressaltar, ainda, que os esquemas apresentados acima também são adequados ao modelo em raiz quadrada, desde que os níveis dos fatores sejam igualmente espaçados em suas raízes quadradas. Por exemplo, se os níveis do i-ésimo fator forem quatro doses de nitrogênio (N) com 0 e 225 kg/ha sendo os níveis extremos, então devemos ter 75 e 150 como níveis intermediários para o modelo (1), com $X_i = N$, e 25 e 100 como níveis intermediários para o modelo em raiz quadrada, ou seja, modelo (1) com $X_i = N^{1/2}$.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao Dr. Jeff D. Colwell pela sugestão deste tópico de pesquisa.

REFERÊNCIAS

COCHRAN, W.G. & COX, G.M. **Experimental designs.** 2.ed. New York, J. Wiley, 1957. 611p.

COLWELL, J.D. **Computations for studies of soil fertility and fertilizer requirements.** s.l., Commonw. Agric. Bur., 1978. 297p.

CONAGIN, A. & JORGE, J.P.N. Delineamentos (1/5) (5^3). **Bragantia**, 36(3):23-58, 1977.